:: PIBID - MAT - UFRGS ::
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Departamento de Matemática Pura e Aplicada (DMPA)

Plano de trabalho desenvolvido para as datas: 13/09, 16/09, 27/09 e 04/10.
Professor: Leonardo Flores da Silva Junior

Resumo da atividade a ser desenvolvida

- A atividade, que tem como objetivo trabalhar as funções exponenciais, é dividida em quatro encontros de 90 min cada. No primeiro, serão apresentados alguns problemas para introduzir o conceito contextualizando-o. No segundo, serão trabalhadas algumas propriedades da função exponencial a partir do problema da Torre de Hanói. Já no terceiro, os alunos serão levados ao laboratório de informática para realizar uma atividade que visa na investigação do comportamento do gráfico da função a partir da variação de suas constantes. Por fim, no último encontro, será proposto mais alguns problemas evidenciando a aplicação do conceito na matemática financeira.

Objetivo geral da(s) atividade(s)

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas e argumentação;
- Relacionar propriedades da operação de potenciação com a função exponencial;
- Reconhecer e trabalhar as diferentes formas de representação da função exponencial;
- Compreender a relação entre as assíntotas de um gráfico e o domínio;
- Compreender a relação entre as constantes da função e os movimentos do gráfico .

Conceitos de matemática presentes na atividade

- Potenciação
- Funções Exponenciais
- Progressão Geométrica
- Matemática Financeira
- Porcentagem

Público alvo

- Alunos da turma 102 (1º ano do ensino médio).

Justificativa / Relevância

- A sequência didática, que tem como objetivo introduzir o conceito das funções exponenciais, se dá a partir da metodologia de resolução de problemas, pois de acordo com a BNCC (2019) no que corresponde a área da Matemática e suas Tecnologias no ensino médio

> [...] novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.
>
> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. (p. 529)

- Além disso, ao propor tais problemas, que atravessam diferentes áreas de conhecimento, o estudo das funções exponenciais está sendo contextualizado utilizando abordagem investigativa que vai ao encontro com Skovsmose (2008), quando aborda o conceito de cenário para investigação com referência a realidade e semi-realidade. Além disso, de acordo com a BNCC (2019), novamente, é importante que o aluno seja capaz de "Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros" (p. 536).
- Ademais, a BNCC (2019) afirma que no ensino médio o estudante deve desenvolver a habilidade de

> analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (p. 539)

O que vai de vai de encontro com as idéias de Duval (2003), que segundo ele o objeto matemático não pode ser definido somente por uma única forma de representação. Assim, a atividade trabalha, de forma articulada, diversos tipos de representações semióticas da função: em forma de tabela, verbal, gráfica e algébrica.

Descrição das atividades:

Aula 1: Introdução às Funções Exponenciais
Tempo: 1 hora e 30 minutos
Atividades: Resolução de Problemas

Nessa aula, o conceito de função exponencial será introduzido aos estudantes por meio de resolução de problemas. Além disso, também serão trabalhadas algumas propriedades importantes da mesa a partir do mesmo método.

<u>1º momento:</u> Apresentação do Conceito de Função Exponencial (Problema 1)
Tempo estimado: 40 minutos

No início da aula, será descrito no quadro o *Problema 1*, que terá o objetivo de introduzir a noção de função exponencial aos alunos. Tal problema consiste em um tabuleiro xadrez, no qual são colocados dois grãos de feijão na primeira casa. A partir disso, será colocado na segunda casa o dobro da quantidade de feijões que tem na primeira. Já na terceira será colocado o dobro da quantidade que tem na segunda e assim por diante. Com isso, será perguntado aos alunos a quantidade de feijões que terá na quinta, na décima e na vigésima casa.

Nesse momento, o objetivo é que os alunos percebam que a quantidade de feijão em cada casa será o resultado de uma série de multiplicações por 2. Para isso, os estudantes poderão trabalhar em conjunto com os colegas e discutir sobre o exercício. Além disso, os alunos poderão utilizar a calculadora para encontrar os valores solicitados. Serão disponibilizados em torno de 20 minutos para isso.

Após a maioria da turma ter resolvido o problema, será feita a correção do mesmo no quadro em conjunto com os discentes. Com objetivo de generalizar o problema para uma casa qualquer, será evidenciada a multiplicação do 2 da seguinte forma:

1º casa: $2 = 2^1 = 2$
2º casa: $2 \times 2 = 2^2 = 4$
3º casa: $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$
4º casa: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$
5º casa: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$
$\vdots$
10º casa: $2 \times 2 \times ... \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1.024$
$\vdots$
20º casa: $2 \times 2 \times ... \times 2 \times 2 = 2^{20} = 1.048.576$

A partir disso, será perguntado aos alunos a quantidade de feijões na n-ésima casa, a fim de atingir a expressão $G = 2^n$ em que G é a quantidade de grãos de feijão na casa n. Com isso, será definida a função $g(x) = 2^x$ ($N \to N$), para o problema.

<u>2º Momento:</u> Construção do Gráfico e Condições de existência da Função Exponencial

- **Tempo estimado:** 25 minutos

Com base nos dados colocados apresentados no segundo momento, será construído o gráfico da função exponencial $g(x) = 2^x$ ($N \to N$). Serão plotados os pontos encontrados no plano cartesiano desenhado no quadro. Para isso, também será adicionado o ponto $P = (0, 1)$. Com base nisso, o domínio da função será expandido de forma que $g(x)$: $R \to R$ a partir da discussão do seu gráfico. Serão estimados valores de $f(x)$ para valores não naturais de x como $-1,\ -2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$, entre outros, de forma que seja possível identificar no gráfico e, assim, estabelecer o formato da função de forma que ela seja contínua.

Feito isso, será pensado em outros valores para a base de forma que possa ser discutida a condição de existência da função. Para isso, será montada uma tabela no quadro da seguinte forma:

x	$y = 2^x$	$y = 3^x$	$y = 4^x$	$y = 5^x$	$y = (\frac{1}{2})^x$	$y = (\frac{3}{4})^x$	$y = (-2)^x$	$y = (-3)^x$	$y = 1^x$	$y = 0^x$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Indef.
1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-2	-3	1	0
2	4	9	16	25	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	4	9	1	0
3	8	27	64	125	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{64}$	-8	-27	1	0
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{-2} \notin R$	$\sqrt{-3} \notin R$	1	0
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$	$\sqrt[3]{-2}$	$\sqrt[3]{2}$	1	0
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$							1	
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$							1	

A partir disso, será possível definir a função exponencial da seguinte forma: $f(x) = b^x$ ($R \to R$), de forma que se discuta as condições de existência da função em relação à constante *b.* Será concluído que $b \in R_+^*$ tal que $b \neq 1$.

Por fim, será discutido a existência de um ponto cuja coordenada y seja igual a 0, ou seja, se a função intercepta o eixo das abscissas. Dessa forma, será evidenciado que não existe valor real para x de forma que vale a igualdade $2^x = 0$, assim introduzindo a definição de assíntota. A partir disso, será possível definir o domínio, o contradomínio e a imagem da função.

<u>3º Momento:</u> Constante a da Função Exponencial (Problema 2)

Tempo estimado: 25 minutos

Feito isso, será descrito no quadro o *Problema 2*, que terá o objetivo de introduzir a constante a da função exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ e trabalhar com um valor de b menor que 1 aos alunos. Para isso, será trabalhado o seguinte problema:

O Carbono-14 é usado para estimar a idade de compostos orgânicos. O tempo de meia vida do Carbono-14 é de 5730, ou seja a cada 5730 anos da morte do organismo que o contém, sua massa cai pela metade. Sabendo que um pedaço de madeira começa com 150 microgramas de carbono-14, qual a quantidade de carbono-14 terá nesse objeto após um período de 5730 anos da sua morte? E após três períodos de 5730 anos? E 10 períodos? E meio período?

Expresse a quantidade $f(x)$ de carbono-14 presente no pedaço de madeira em função da quantidade de períodos x de 5730 anos após sua morte.

Após a maioria da turma ter resolvido o problema, será feita a correção do mesmo no quadro em conjunto com os discentes. Será evidenciado a relação da constante a com o gráfico da função e a noção da constante b como fator de crescimento/decaimento da função. Será feita uma tabela que relacione os valores de x e y de modo que os alunos consigam ter uma ideia de como se comporta a função.

Primeiramente, serão evidenciados os valores de y para x igual a 0, 1, 2, 3 e 4, da seguinte forma:

x	$y = f(x) = 150 \cdot (\frac{1}{2})^x$
0	$150 \cdot (\frac{1}{2})^0 = 5730$
1	$150 \cdot (\frac{1}{2})^1 = 2865$
2	$150 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 1432,5$
3	$150 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 716,25$
4	$150 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 358,125$

Aula 2: Propriedades da Função Exponencial
Tempo: 1 hora e 30 minutos
Atividades: Torre de Hanói

Nessa aula, serão trabalhadas novas propriedades da função exponencial a partir da investigação do problema da *Torre de Hanói*.

__1º momento:__ **Lenda da Torre de Hanói**
Tempo estimado: 10 minutos

Para introduzir o assunto, primeiramente será dado um contexto histórico do problema, o qual foi criado por Edouard Lucas, matemático francês, em 1883. Acompanhado do jogo era contada a seguinte lenda romântica:

> No tempo de Benares, cidade santa da Índia, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e da grossura do corpo de uma abelha. Durante a Criação, Deus colocou 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, o maior deles imediatamente acima da bandeja e os demais, cada vez menores, por cima. Esta torre foi chamada de Torre de Brahma.
>
> Dia e noite os sacerdotes trocavam os discos de uma agulha para outra, de acordo com as leis imutáveis de Brahma. Essa lei dizia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de um disco por vez, e que o disco fosse colocado na outra agulha, de maneira que o debaixo nunca fosse menor do que o de cima. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos da agulha colocada por Deus no dia da Criação para outra agulha, o mundo deixaria de existir.
>
> Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de 1 disco por segundo. (FERRERO, 1991; MACHADO, 1992, apud COSTA).

A partir dessa lenda surgem as regras e as primeiras questões que motivam e norteiam o problema. Quanto tempo será necessário para que os monges concluam o trabalho se não errarem nenhum movimento? Quantos movimentos serão necessários para transferir todos os 64 discos da lendária Torre de Hanoi? E por conta disso, a lenda também será contada aos estudantes a fim de introduzi-los no assunto. Feito isso, será apresentado o objeto, ao qual a lenda se refere, ou seja o jogo propriamente dito, e será explicado suas regras e como manuseá-lo.

__2º Momento:__ **Problema da Torre de Hanói (Problema 3)**
Tempo estimado: 50 minutos

A partir disso, será apresentado o problema aos estudantes. Para que todos entendam, será feito à turma um exemplo utilizando 3 peças. Feito isso, os estudantes serão divididos em grupos de aproximadamente 5 alunos e serão desafiados a resolver o problema utilizando 4, 5, 6 e 7 peças, sempre buscando o número mínimo de movimentos. Para isso será entregue um jogo para cada grupo. Haverão dois tipos de materiais diferentes, um de madeira e outro de papel, cujo modelo encontra-se disponível no Anexo III e IV. Será solicitado que todos registre o menor número de movimentos para cada quantidade de peças conforme a tabela abaixo:

Quantidade de discos na torre	Quantidade de movimentos de cada peça						Quantidade total de movimentos
	Peça 1	Peça 2	Peça 3	Peça 4	Peça 5	Peça 6	
1	1						1
2	2	1					3
3	4	2	1				7
4	8	4	2	1			15
5	16	8	4	2	1		31
6	32	16	8	4	2	1	63

A medida que os grupos forem acabando, será proposto aos integrantes do mesmo que tentem estimar a quantidade de movimentos necessários para 10, 20 e n peças. Após todos os grupos resolverem o problema para cada número de peças de 1 à 7 (não necessariamente a menor quantidade de movimentos possível), será feito um compartilhamento das experiências com a turma inteira. Será explicada a resolução do problema evidenciando cada paço que auxilia na expansão do problema para qualquer número natural de peças.

<u>3º momento:</u> Generalização

Tempo estimado: 20 minutos

A partir disso, será criada, no quadro, a tabela, descrita acima, que relacionando o número mínimo de movimentos para cada quantidade de peças. Dessa forma será possível observar como a relação se comporta. Com isso, será construída a função exponencial $f(x) = 2^x - 1$, que expressa a quantidade mínima de movimentos necessários para qualquer número natural de pessoas.

Por fim, será construído no quadro o gráfico da função. Nesse momento, a constante c será trabalhada como uma translação vertical da assíntota horizontal.

Aula 3: Observando Regularidades

Tempo: 1 hora e 30 minutos

Atividades: Movimentos no GeoGebra

Nessa aula, serão estabelecidas algumas definições e propriedades da função exponencial a partir da análise da mesma no software GeoGebra.

<u>1º momento:</u> Organização

Tempo estimado: 10 minutos

O primeiro momento será reservado para o deslocamento até o laboratório de informática e para a organização dos estudantes nos computadores.

<u>2º Momento:</u> Exploração das Constantes "*a*", "*b*" e "*c*"

Tempo estimado: 50 minutos

Organizados, os estudantes serão orientados a explorar a constante b da função $f(x) = a \cdot b^x + c$ a partir da função $g(x) = b^x$ no software GeoGebra. Para isso, será entregue uma folha com perguntas norteadoras do estudo (Anexo I). Será solicitado que criem funções com diferentes valores para b, como $0,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{2}$, entre outros, e observem o que acontece com o gráfico da exponencial. A partir disso, será proposto que eles definam o conjunto o qual b pertence para que $g(x)$ seja uma função exponencial. O mesmo será feito para as constantes c e a, a partir das funções $h(x) = 2^x + c$ e $i(x) = a \cdot 2^x$, respectivamente. Além disso, será solicitado que escrevam como cada constante influencia o gráfico da função. Por exemplo, o que acontece quando $a > 1$, $1 > a > 0$, $a = 0$, $-1 < a < 0$ ou $a < -1$. Cada passo, deverá ser registrada pelo aluno e entregue após a conclusão da atividade.

<u>3º Momento:</u> compartilhamento

Tempo estimado: 30 minutos

Feito isso, será feito um compartilhamento das experiências e um fechamento das definições no quadro. De forma que $f(x) = a \cdot b^x + c$ e uma função que $R \to R$; $a \in R^*$ e implica no alongamento ou compressão da função dependendo se $|a| > 1$ ou $|a| < 1$ e reflexão caso $a < 0$; $b \in R_+^*$ tal que $b \neq 1$ e implica no crescimento ou decrescimento da função dependendo se $b > 1$ ou $b < 1$. $c \in R$ e implica na translação vertical da assíntota horizontal.

Aula 4: Outras Aplicações do Conceito
Tempo: 1 hora e 30 minutos
Atividades: Matemática Financeira

Nesse dia, o conceito de função exponencial será trabalhado a partir da perspectiva da matemática financeira. Para isso, serão trabalhados problemas envolvendo juros compostos.

<u>1º momento:</u> Introdução à Matemática Financeira
Tempo estimado: 10 minutos

Primeiramente, será entregue uma folha (Anexo II) com a sequência de atividades a serem desenvolvidas durante e após a aula. Feito isso, será introduzido aos alunos alguns conceitos de matemática financeira como Juros (J), Taxa de Juros (i), Montante(S) e Principal (P) e a relação entre eles. Será dado alguns exemplos de aplicação dos conceitos utilizando o fórmulas $S = P + J$ e $J = Pi$ e por consequência $S = P(1+i)$.

<u>2º Momento:</u> Juros Compostos (Problema 4)
Tempo estimado: 30 minutos

Com isso, será apresentado aos alunos o *Problema 4*, que consiste em: *Um banco cobra a taxa de juros mensal do cartão de crédito no valor de 15% do saldo rotativo (valor utilizado no mês). Em caso de inadimplência, a taxa será aplicada mensalmente ao montante do mês anterior. Baseando-se nisso, suponhamos que um cliente desse banco tenha gasto* $R\$\ 100,00$ *no primeiro mês e não tenha pago a fatura desde então, quanto o cliente estará devendo ao banco no final do mês seguinte? e depois de três meses? e após um ano?*

Nesse momento, o objetivo é que os alunos percebam que a o valor da fatura no final de cada mês será o resultado da multiplicação de 100 por $1,15^n$, em que n corresponde ao número de meses em atraso. Assim, generalizando para a expressão $S = P(1+i)^n$, em que n pertence ao conjuntos dos naturais. Para isso, a correção será feita a partir do seguinte esquema:

$$\text{mês 1: } S_1 = P\ (1+i) \Rightarrow S_1 = 100 \cdot (1 + 0,15)$$
$$\text{mês 2: } S_2 = S_1(1+i) \Rightarrow S_2 = S_1(1+0,15) \Rightarrow S_2 = 100 \cdot (1,15)\ \cdot (1+0,15) \Rightarrow S_2 = 100 \cdot (1,15)^2$$
$$\text{mês 3: } S_3 = S_1(1+i) \Rightarrow S_3 = 100 \cdot (1,15)^2\ \cdot (1,15) \Rightarrow S_3 = 100 \cdot (1,15)^3$$
$$\vdots$$
$$\text{mês n: } S_n = S_{n-1}(1+i) \Rightarrow S_n = 100 \cdot (1,15)^{n-1}\ \cdot (1,15) \Rightarrow S_n = 100 \cdot (1,15)^n$$

Depois, a expressão será relacionada à uma função exponencial, assim expandindo o domínio para o conjunto dos números reais. De forma, será estudada a função $s(x) = P(1+i)^x$, para $x \in R$. Com isso, será possível trabalhar com o domínio, imagem, gráfico e constantes da função. Para isso, os estudantes poderão trabalhar em conjunto com os colegas e discutir sobre o exercício. Além disso, os alunos poderão utilizar a calculadora para encontrar os valores solicitados.

Após isso, será perguntado aos alunos qual a porcentagem da dívida em relação ao valor inicial após um ano de inadimplência. Nesse momento o objetivo é que os alunos percebam a variação do fator de crescimento e relacionem com o comportamento da função.

<u>3º Momento:</u> Rendimento de Investimentos (Problema 5)

Tempo estimado: 20 minutos

Feito isso, será proposto o *Problema 5*, cuja resolução é análoga ao anterior. O problema que consiste em identificar o conceito de um segundo contexto, é descrito da seguinte forma:

Em um banco a taxa de juros do investimento na conta poupança tem o valor de 1,2% ao mês. Se uma pessoa resolver colocar R$1.500 no mês de setembro de 2019 e não depositar e nem retirar valor algum da conta, quanto ela tará após 1 mês? E 1 ano? E 5 anos e meio?

Expresse uma função que caracteriza os rendimentos da conta poupança dessa pessoa em meses. Feito isso, construa seu gráfico.

Após a maioria da turma ter terminado, o problema será corrigido no quadro de forma semelhante ao anterior.

<u>4º Momento:</u> Encaminhamento (Resolução de exercícios)

Tempo estimado: 30 minutos

Restante da aula será dedicado à sequência de atividades (Anexo II) que deverá ser resolvida e entregue na aula seguinte.

Avaliação:

A avaliação será feita a partir da análise de conteúdos procedimentais, atitudinais e conceituais:

- Participação em sala de aula, que consiste na observação dos aspectos: engajamento na atividade proposta e aplicação dos conceitos trabalhados;
- Registro escrito da atividade realizada;
- Assiduidade e pontualidade;
- Desempenho nas atividades.

Bibliografia:

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular. Disponível em: . Acesso em: 10 de mai. de 2019.

- CARNEIRO, Vera Clotilde. Funções Elementares: 100 situações-problema de matemática. 1. ed. Porto Alegre: Editora UFRGS, 1993.

- COSTA, A. Torre de Hanói, uma proposta de atividade para o Ensino Médio. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/2ALEXANDREDACOSTA.pdf> Acesso em: 05 set. 2019.

- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. p. 37-64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993.

- DUVAL, R. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Organização de Silvia Dias Alcântara Machado, p.11- 33. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003.

- LEÃO, A. S. G.; BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista – RS**. Canoas-RS, v.1, n.10, p.27-35, 2009.

- Magarinus, Renata. UMA PROPOSTA PARA ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Maria, Brasil, 2013.
- SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. In: Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas (SP). Editora Papirus. 2008.