



PIBID

Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência

Licenciatura em Matemática (UFRGS)

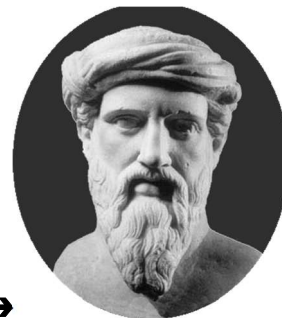


UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO



ANEXO II

TEOREMA DE PITÁGORAS



Pitágoras →

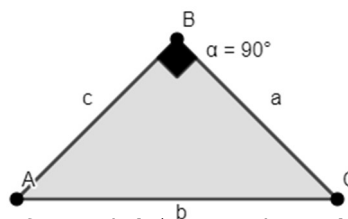
Fonte: https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fescuteconigo.wordpress.com%2F2013%2F03%2F31%2Fmuseica-pitagoras-e-a-matematica%2F&psig=ADwVaw3CzCaQLG3R2vcHK-x390tfust=1691272634469000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBEQjRxgFwoTCODr3Nj_w4ADFQAAAAAABAE

Pitágoras foi um matemático e filósofo grego que viveu por volta de 572 a.C. Nascido na ilha de Samos, ele viajou por muitos lugares, como Pérsia e Egito, e de acordo com alguns relatos é possível que tenha sido discípulo de Tales de Mileto. Em Crotona, localizada atualmente na Itália, ele fundou a Escola Pitagórica, que consistia em um centro de estudos de Matemática, Ciências Naturais, Filosofia etc.

O nome de Pitágoras é dado a um teorema por ter sido o primeiro a demonstrá-lo, apesar de os babilônios e os egípcios já o utilizarem em construções e em medições de terras. Esse teorema estabelece uma relação entre os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo.

De acordo com esse teorema, em todo triângulo retângulo a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

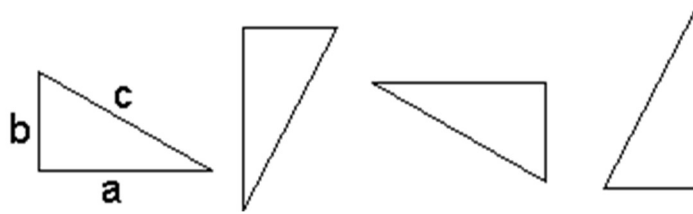
$$a^2 = b^2 + c^2$$



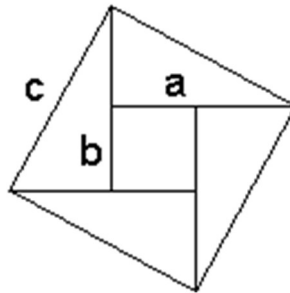
Fonte: elaborado pela professora bolsista usando o aplicativo Geogebra.

Podemos verificar essa relação por meio de figuras. Por exemplo, para um triângulo retângulo com lados medindo 3, 4 e 5 unidades de comprimento, consideramos três quadrados; cada um construído a partir de um lado do triângulo, conforme o que vocês construíram anteriormente. Note que a medida da área do quadrado construído a partir da hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos a partir dos catetos, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

Observe uma demonstração utilizando os conhecimentos adquiridos:



Começamos com quatro cópias do mesmo triângulo. Três deles foram girados em 90° , 180° e 270° , respectivamente. Cada um tem área $\frac{ab}{2}$. Vamos juntá-los sem rotações adicionais para que formem um quadrado de lado c .



O quadrado tem um buraco quadrado com o lado $(a-b)$. Somando sua área $(a-b)^2$ e $2ab$, a área dos quatro triângulos $(4 \cdot \frac{a}{b})$, obtemos

$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

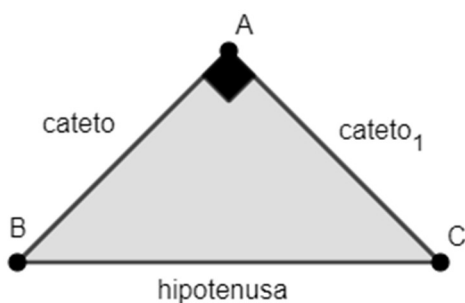
$$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Assim, chegamos na fórmula do Teorema de Pitágoras.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

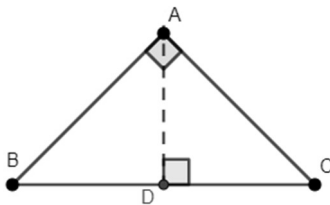
A seguir veremos relações e propriedades existentes em triângulos retângulos, isto é, aqueles que possuem um ângulo interno reto. Antes, porém, vamos destacar alguns elementos do triângulo retângulo.



→ A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e é o maior lado do triângulo retângulo.

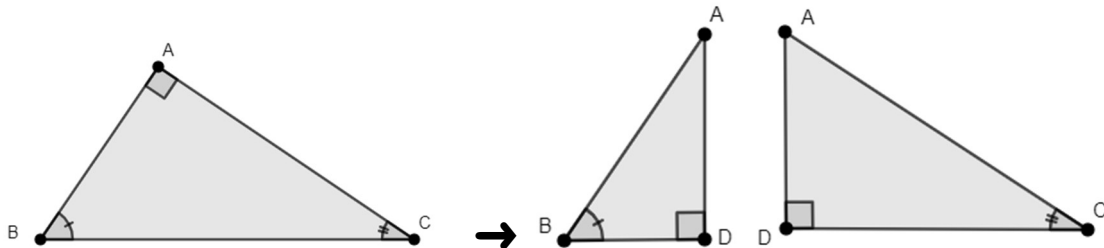
BC: _____
AB e AC: _____

Agora, veja esse triângulo com a **altura relativa à hipotenusa** (AD) traçada.



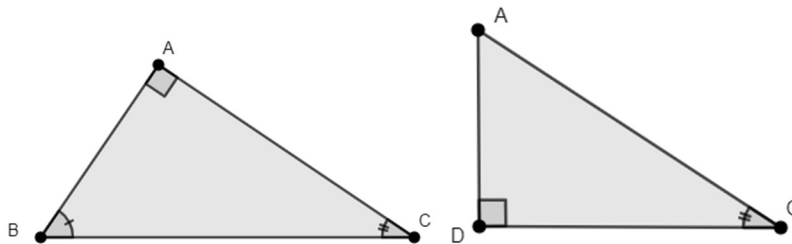
Elaborado pela professora bolsista usando o aplicativo Geogebra

Ao traçar a altura, podemos destacar os triângulos retângulos ABC , ADC e ABD . Veja como podemos verificar se esses triângulos são semelhantes entre si. Inicialmente consideramos os três triângulos separadamente.



Elaborado pela professora bolsista usando o aplicativo Geogebra

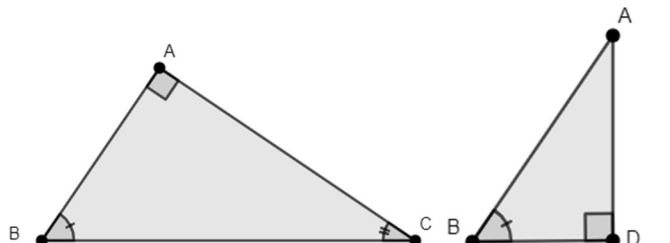
→ Observando os triângulos ABC e ADC , podemos notar que $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ADC}$, pois são retos, e que $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ACD}$, pois são comuns aos dois triângulos.



Elaborado pela professora bolsista usando o aplicativo Geogebra

Assim, $\triangle ABC \sim \triangle ADC$.

→ Observando os triângulos ABC e ABD , podemos notar que $\widehat{BCA} \equiv \widehat{ADB}$, pois são retos, e que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ABD}$, pois são comuns aos dois triângulos.



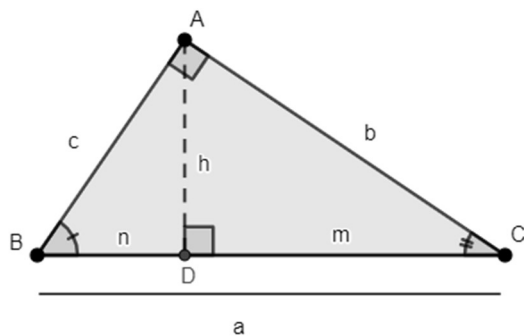
Elaborado pela professora bolsista usando o aplicativo Geogebra

Assim, $\triangle ABC \sim \triangle ABD$.

Como os triângulos ADC e ABD são semelhantes ao triângulo ABC , esses triângulos são semelhantes entre si, ou seja, $\triangle ABC \sim \triangle ADC \sim \triangle ABD$

Em um triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois outros triângulos retângulos, que são semelhantes ao maior e, conseqüentemente, semelhantes entre si.

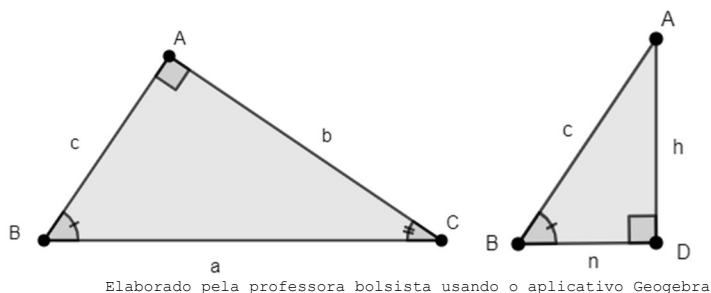
A partir da semelhança desses triângulos, podemos estabelecer algumas relações entre as medidas do comprimento de seus lados. Para isso, indicaremos essas medidas com letras minúsculas.



a: medida do comprimento da hipotenusa
b e c: medida do comprimento dos catetos
h: medida do comprimento da altura relativa à hipotenusa
m e n: medidas dos comprimentos das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, sendo $a = m + n$

Como em triângulos semelhantes os lados correspondentes são proporcionais, podemos escrever as seguintes proporções.

→ Em relação aos triângulos ABC e ABD.



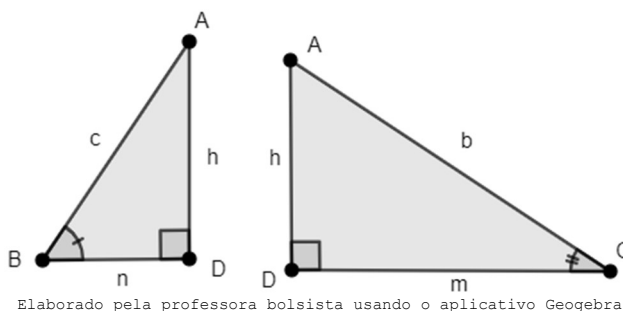
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$$

$$a \cdot n = c \cdot c$$

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{h}$$

→ Em relação aos triângulos ABD e ADC.



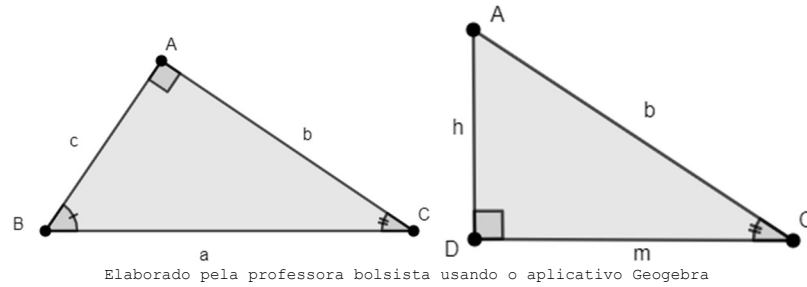
$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{m}$$

$$h \cdot h = m \cdot n$$

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{m}$$

Em relação aos triângulos ABC e ADC demonstre que as relações $b^2 = a \cdot m$, $a \cdot h = b \cdot c$ e $c \cdot m = b \cdot h$ são verdadeiras.



Dessa maneira, temos as seguintes relações métricas no triângulo retângulo.

$$\begin{array}{lll} a = m + n & c \cdot n = b \cdot h & c^2 = a \cdot n \\ c \cdot h = b \cdot n & a \cdot h = b \cdot c & h^2 = m \cdot n \\ b^2 = a \cdot m & & \end{array}$$