INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS

Este material é uma revisão sobre alguns conceitos e resultados da teoria dos sistemas dinâmicos, com o objetivo de facilitar a melhor compreensão deste tema para estudantes de economia, em particular, interessados na Teoria do Crescimento Econômico. As fontes consultadas, que recomendamos estudar, aparecem na relação bibliográfica.

Prof. Alberto Martinez Castaneda
Prof. Sabino da Silva Porto Júnior
FCE-UFRGS

1. INTRODUÇÃO:

A Estática Comparativa teve um papel preponderante na economia durante longo tempo, mas atualmente a Dinâmica está colocada em um primeiro plano na formulação de muitos modelos macroeconômicos, em particular na área de Crescimento Econômico, que é o nosso interesse.

Dinâmica é sinônimo de movimento e sabemos que o movimento no tempo está presente em quase todo fenômeno econômico. Chamaremos **Sistema Dinâmico** a um sistema ou agente econômico cujos estados mudam no tempo. O conjunto de todos os estados possíveis do sistema é o chamado **espaço dos estados**. Farmer (1993) indicou dois fatos decisivos que justificam a entrada da dinâmica na ciência econômica:

- O presente depende do passado, matematicamente resumido, $x_t = f(x_{t-1})$.
- Qualquer agente econômico no presente tem expectativas em relação ao futuro, matematicamente, $x_t = g(Ex_{t+1})$.

A derivada $\dfrac{dx}{dt}$ indica a taxa instantânea de variação da variável x em relação à variável t no caso contínuo, e no caso de t tomar valores discretos, a diferença $x_t - x_{t-1}$ exprime a variação em x como conseqüência da variação unitária em t. Por tanto, é de se esperar que as ferramentas matemáticas necessárias para estudar o comportamento dos sistemas dinâmicos são essencialmente as equações e sistemas de equações diferenciais e as equações e sistemas de equações de diferença, envolvendo funções cuja variável independente é o tempo t. Portanto, na modelagem de um fenômeno econômico concreto podemos encontrar a variável t tomando valores contínuos ou discretos.

O fato que caracteriza o uso de *equações diferenciais* é a variação continua da variável tempo t. Na variação continua, t tem como domínio de valores um intervalo de números reais $t \in [0,T]$. Se $T \in \mathbf{R}$ dizemos que estamos tratando com um horizonte finito e se $T = \infty$, com um horizonte infinito.

As ***equações de diferença*** são utilizadas quando a variável tempo t toma valores discretos (ou descontínuos) num subconjunto dos números inteiros Z. Por exemplo $t = 0,1,2,3,\cdots,n$. Em economia é freqüente trabalhar com valores discretos de tempo, por exemplo, o PIB anual de um pais, o lucro mensal de uma firma, etc. Por isto é freqüente em muitos livros de economia dar maior ênfase ao enfoque discreto.

A distinção entre o caso continuo e o discreto leva a certas particularidades na formulação dos modelos e nos seus métodos de solução, mas a teoria básica é quase a mesma para ambas as situações. Na teoria do Crescimento Econômico encontramos muitas aplicações dos sistemas dinâmicos, tanto contínuos quanto discretos.

No estudo matemático dos sistemas dinâmicos geralmente começa-se com *sistemas lineares* de equações diferenciais ou de diferença (este e outros conceitos mencionados nesta introdução serão colocados com maior rigor no desenvolvimento da apostila). As equações com coeficientes constantes têm métodos de solução mais fáceis e freqüentemente possuem soluções exatas. Para equações *não-lineares* é mais difícil achar soluções explícitas e pode ser conveniente recorrer ao estudo de *propriedades qualitativas* das soluções, isto é, propriedades que podem ser conhecidas sem se ter calculado efetivamente a solução. As propriedades qualitativas são importantes, pois permitem visualizar geometricamente fatos úteis para a análise de modelos neoclássicos de crescimento.

Outra causa da preferencia pelos sistema lineares é que sob determinadas hipóteses é possível aproximar um sistema não-linear por um linear, na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Até tempos recentes, a maioria das aplicações econômica tratava unicamente sistemas originalmente lineares ou linearizados. Mas, atualmente os sistemas dinâmicos não-lineares têm ocupado muito espaço na macroeconomia e, em particular, na literatura de crescimento econômico. Por exemplo, podem ser vistos nos modelos unisetoriais de crescimento de longo prazo de Solow, Ramsey e Diamond; no sistema de crescimento bisetorial de Uzawa, entre outros.

O nível atual de desenvolvimento dos computadores (hardware) e do software matemático propiciam um suporte técnico muito favorável ao estudo da dinâmica econômica. Existem planilhas como o Excel, Lottus1-2-3, QuattroPro, etc.; sistemas como o Maple V, o Mathematica e o Matlab que servem para resolver a maioria dos sistemas. A escolha de um ou outro depende das características do problema e das preferências do usuário.

Começaremos com a exposição dos conceitos básicos relativos às equações diferenciais e de diferença.

EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA:

Definição 1: Uma **equação diferencial ordinária** (**EDO**) é uma equação da forma

$$x^{(m)}(t) = F\left[t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots, x^{(m-1)}(t); \alpha\right] \qquad (1)$$

onde: $x(t) = \left[x_1(t), \ldots, x_n(t)\right]$ é uma função vetorial de uma variável real, ou seja, $x : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$;

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right),\ \ddot{x}(t) = \left(\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}, \frac{d^2x_2(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2x_n(t)}{dt^2}\right), \ldots,$$

$$x^{(m)}(t)=\left(\frac{d^m x_1(t)}{dt^2},\frac{d^m x_2(t)}{dt^2},...,\frac{d^m x_n(t)}{dt^2}\right);$$

$\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p\right)\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^p$ é um vetor de parâmetros;

F é uma função $F:\mathbf{R}^{1+n(m-1)+p}\to\mathbf{R}^n$ que assumiremos como sendo, ao menos, de classe C^1.

Observações relativas à definição:

1.- F é uma equação funcional, ou seja, uma equação na qual a incógnita é uma função. Neste caso a incógnita é a função vetorial $x(t)$.
2.- A variável independente ***t*** é continua, isto é, toma valores reais, em todo $\mathbf{R}$ ou em um intervalo $J\subseteq\mathbf{R}$.
3.- *Resolver* a equação (1) significa achar as funções $x(t)$, tais que, junto com as suas derivadas $\dot{x}(t),...,x^{(m)}(t)$, satisfazem a equação (1) para valores dados dos parâmetros.

EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS:

Definição 2 : Uma **equação de diferenças** (**EDif**) é uma equação da forma

$$x_{t+m}=G\left[t,x_t,x_{t+1},...,x_{t+m-1};\alpha\right] \qquad (2)$$

onde: $x_s\in\mathbf{R}^n$ denota o estado do sistema no período s e α é como na definição (1).

Observações em relação à definição:

1.- G, igual que F, é uma equação funcional.

2.- A variável independente t toma valores discretos ou descontínuos, isto é, $t\in J\subseteq Z$. Z denota o conjunto dos números inteiros.

3.- A incógnita na equação (2) é a seqüência de vetores x_t. Lembremos que uma seqüência é uma aplicação que tem como domínio um subconjunto dos números inteiros. Na definição, $x:J\subset Z\to\mathbf{R}^n$. Para cada $t\in J$, $x_t=x(t)\in\mathbf{R}^n$.

4.- Uma solução de (2) é uma seqüência $\tilde{x}_t$ que, substituída na equação, transforma-a numa identidade. *Resolver* a equação (2) significa achar as seqüências x_t que são suas soluções.

EQUAÇÕES LINEARES:

Definição 3:

a) A EDO (1) é *linear*, se é linear em x(t) e suas derivadas.
b) A Edif (2) é *linear*, se é linear em $x_t, x_{t+1}, ..., x_{t+m-1}$.

Observações:

1.- O item (a) da definição acima significa os termos da equação que contêm a variável podem ser escritos na forma $a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + \cdots a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t)$. Caso contrário, dizemos que a equação (1) é não-linear. Observemos que para (1) ser linear não exigimos a linearidade em t e α.

2.- No item (b) temos presente a mesma idéia em relação à linearidade, colocando $a_0(t)x_t + a_1(t)x_{t+1} + \cdots a_{m-1}(t)x_{t+m-1}$ no lugar de $a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + \cdots a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t)$.

ORDEM DAS EQUAÇÕES.

Definição 4:
a) Chamamos ordem da equação diferencial (1) à ordem da derivada de maior ordem de $x(t)$ que apareça na equação.
b) Chamamos ordem da equação de diferenças (2) à diferença entre o maior e o menor dos índices s de x_s na equação.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS.

Definição 5:
a) Uma equação diferencial do tipo $a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + \cdots a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) = g(t)$ é dita **homogênea** se $g(t) \equiv 0$.
b) Uma equação de diferenças do tipo $a_0(t)x_t + a_1(t)x_{t+1} + \cdots a_{m-1}(t)x_{t+m-1} = g(t)$ é dita **homogênea** se $g(t) \equiv 0$.

Vejamos alguns exemplos para consolidar os conceitos.

Exemplo1: Exemplos de equações diferenciais.

$$i) \quad \dot{x}(t) - 8x(t) = 2 + e^{-3t}$$

$$ii) \quad x''(t) + 5tx'(t) - t^2 x(t) = 0$$

$$iii) \quad \frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d\ x}{dt} + \frac{1}{3}x = x^2 - 1$$

$$iv) \quad [\dot{x}(t)]^2 - x(t) = \ln x$$

$$v) \quad \dot{x} + 2x(t) = 1$$

i) É uma EDO linear de primeira ordem com coeficientes constantes.
ii) É uma EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes variáveis
iii) É uma EDO linear não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.
iv) È uma EDO não-linear.
v) È uma EDO linear de primeira ordem, não-homogênea, com coeficientes constantes.

Exemplo 2: Exemplo de equações de diferença.

$$(i)\ \ x_{t+1} = 2 + 3x_t$$
$$(ii)\ \ x_{t+2} - 2tx_{t+1} - 3x_t = 5t$$
$$(iii)\ x_{t+1} = x_t(1 - x_t)$$
$$(iv)\ x_{t+1} = r\ln\left(\frac{k}{x_t}\right)$$
$$(v)\ \ x_{t+1} - 2x_t = t$$
$$(vi)\ x_{t+1} - 2x_t = 5$$
$$(vii)\ K_t = \left(1-\delta\right)K_{t-1} + I_t$$

i) É uma Edif linear de primeira ordem com coeficientes constantes.
ii) É uma Edif linear de segunda ordem com coeficientes não-constantes.
iii) É uma Edif não-linear.
iv) É uma Edif não-linear.
v) É uma Edif linear não-homogênea de primeira ordem.
vi) É uma Edif linear não-homogênea de primeira ordem.
vii) É a equação que descreve a acumulação do estoque de capital K no tempo. No período t , o estoque atual é igual ao estoque do período anterior, descontada a depreciação, mais os novos investimentos I no período t.

Nos estudaremos unicamente sistemas de equações de diferenças de primeira ordem. Esta não é uma limitação séria, já que podemos transformar um sistema de ordem superior num sistema de primeira ordem, introduzindo equações e variáveis adicionais. Por exemplo, na equação

$$x_t = f\left(x_{t-1}, x_{t-2}\right) \qquad (3),$$

podemos definir a nova variável y por

$$y_t = x_{t-1} \qquad (4a),$$

e rescrever (4) como

$$x_t = f(x_{t-1}, y_{t-1}) \qquad (4b).$$

A equação de segunda ordem (3) é equivalente ao sistema formado pelas equações (4a) e (4b) . Por tanto, sem perda de generalidade podemos nos concentrar nas equações de diferença de primeira ordem do tipo

$$x_{t+1} = G(t, x_t; \alpha) \qquad (5)$$

onde x_t é um vetor num Espaço Euclidiano $\mathbf{R}^n$.

Para uma equação diferencial podemos fazer algo muito parecido. Por exemplo, se temos $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t, \alpha)$ (6), introduzimos $y = \dot{x}$ (7); obtendo o sistema de equações formado por (7) e $\dot{y} = g(y, x, t, \alpha)$ (8), que resulta equivalente à equação (6).

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA:

Para compreender melhor alguns conceitos e situações em relação as equações diferenciais e de diferença, é conveniente lançar mão de uma interpretação geométrica com raízes na física.

Imaginemos que a equação de diferenças $x_{t+1} = g(x_t, t; \alpha)$ modela o movimento de uma partícula num espaço $\mathbf{R}^n$. A posição da partícula no tempo *t* é dada pelo vetor x_t. No período imediato seguinte, $t + 1$, a posição da partícula corresponderá ao vetor x_{t+1}. O vetor diferença $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$ tem sua origem na posição associada ao tempo *t* e sua extremidade na posição associada ao tempo *t* + 1. Considerando os valores consecutivos *t*=0,1,2,3,.....,m e os correspondentes vetores Δx_t, obtemos uma seqüência de vetores que mostram, passo a passo o movimento da partícula. Assim, podemos "visualizar" a mudança no tempo dos estados do sistema. Cada vetor Δx_t mostra o "pulo" do estado do sistema em um período para o período imediatamente consecutivo. Iterativamente podemos construir a seqüência de vetores $\left\{\Delta x_t ; t = 0,1,2,...\right\}$ Observemos que $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t = g(x_t, t; \alpha) - x_t$.

Se especificamos um valor inicial, $x_s = \tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, s inteiro, o caminho indicado pelas flechas (vetores Δx_t) mostra a **trajetória** ou **órbita do sistema** e a seqüência solução $\left\{x_t\right\}$, $t \geq s$. Evidentemente, se mudamos a condição inicial ou os parâmetros, obteremos uma trajetória diferente no espaço dos estados do sistema.

Na figura (1) mostramos uma trajetória solução de um sistema dinâmico discreto. O espaço dos estados é $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbf{R}^2$.

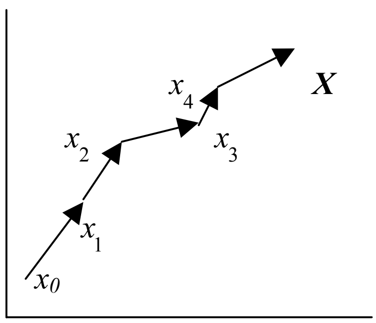

Fig. 1: Trajetória de uma solução de um sistema dinâmico.

Se temos uma equação diferencial $\dot{x} = f(x,t;\alpha)$ no lugar de uma equação de diferenças, o movimento da partícula no tempo descreve uma curva contínua suave, no lugar da seqüência de pulos mostrada no casso discreto. Em cada ponto dessa curva podemos tomar o vetor tangente $\dot{x}(t) = f(x(t))$, determinado pelo campo vetorial f. O vetor $\dot{x}(t)$, no problema físico do movimento da partícula, é a velocidade instantânea em t.

Resolver a equação diferencial $\dot{x} = f(x,t;\alpha)$ correspondente ao problema dinâmico contínuo é achar o conjunto de todas as funções $\phi(t)$ que descrevem as trajetórias das soluções particulares no espaço dos estados. Cada $\phi(t)$ se "encaixa perfeitamente" no campo vetorial (dos vetores tangentes) definido por $f(x,t;\alpha)$. Como no casso discreto, existem em geral infinitas soluções particulares, dependentes de cada trajetória, do valor inicial no tempo e dos parâmetros α. Na figura (2) mostramos o gráfico de uma seqüência solução no casso contínuo.

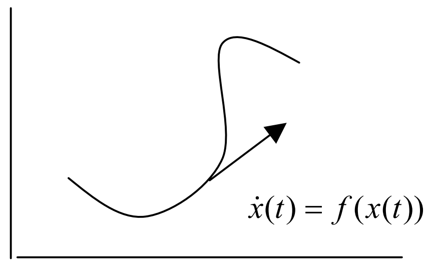

Fig.2: Casso contínuo.

Formalizemos o conceito de sistema dinâmico:

<u>Definição 6</u>: SISTEMAS DINÂMICOS EM $\mathbf{R}^n$.

Um sistema dinâmico parametrizado em $\mathbf{R}^n$ é um par (X,g), onde $X \subseteq \mathbf{R}^n$, chamado *espaço dos estados*, é o conjunto de todos os estados possíveis do sistema, e a aplicação $g: X \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \to X$ é uma regra que descreve o estado atual do sistema em função do tempo, do estado inicial e dos parâmetros $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\right) \in \mathbf{R}^p$.

Observações na definição:

- Cada estado possível do sistema é modelado por um vetor x de $\mathbf{R}^n$. No caso mais simples n=1 e X=$\mathbf{R}$. Para este caso podemos, com muita simplicidade, representar graficamente o conjunto dos estados e interpretar intuitivamente idéias que ,para dimensões superiores, ficam mascaradas pelo formalismo da definição.
- Como os estados mudam segundo o tempo varia, precisamos introduzir a variável independente tempo, t.
- Cada conjunto de valores dos parâmetros, representados pelo vetor α, modela fatores de diversa índole que, embora não sejam variáveis endógenas do sistema,

refletem caraterísticas estruturais importantes do mesmo, ou valores exógenos, tais como políticas econômicas vigentes que influem significativamente na forma como mudam os estados do sistema no tempo. Por tanto, devem aparecer no modelo.

- A variação dos estados do sistema no tempo vem dada pela aplicação *g*. Esta aplicação diz qual é o estado do sistema num dado tempo, conhecidos o estado do sistema considerado inicial e os valores vigentes dos parâmetros α. A dinâmica do sistema é modelada por *g*, chamada de *função de transição dos estados* ou *fluxo*. Por tanto, naturalmente resulta, que o domínio de *g* deve conter um "nicho" para os conjuntos de todos os estados possíveis, para poder selecionar, dentre eles, o inicial. Precisa, também, de outro "nicho" para dar o tempo no qual desejamos conhecer o estado atual do sistema. Por último, reservaremos outro "nicho" para selecionar os valores vigentes dos parâmetros. Em fim, o domínio de *g* será um trio formado pelo conjunto dos estados possíveis do sistema, os valores do tempo e o conjunto dos valores possíveis dos parâmetros α. Matematicamente formalizamos esse domínio pelo produto cartesiano $X \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$.
- Para conhecer o sistema dinâmico e seu comportamento no tempo os elementos imprescindíveis são: *i*) o conjunto *X* dos estados do sistema, *ii*) A aplicação *g* de transição dos estados. Por tanto, matematicamente dizemos que o sistema é o par (*X,g*) para indicar essa unidade.

Graficamente podemos dar uma idéia da aplicação *g*, como mostrado na figura 3.

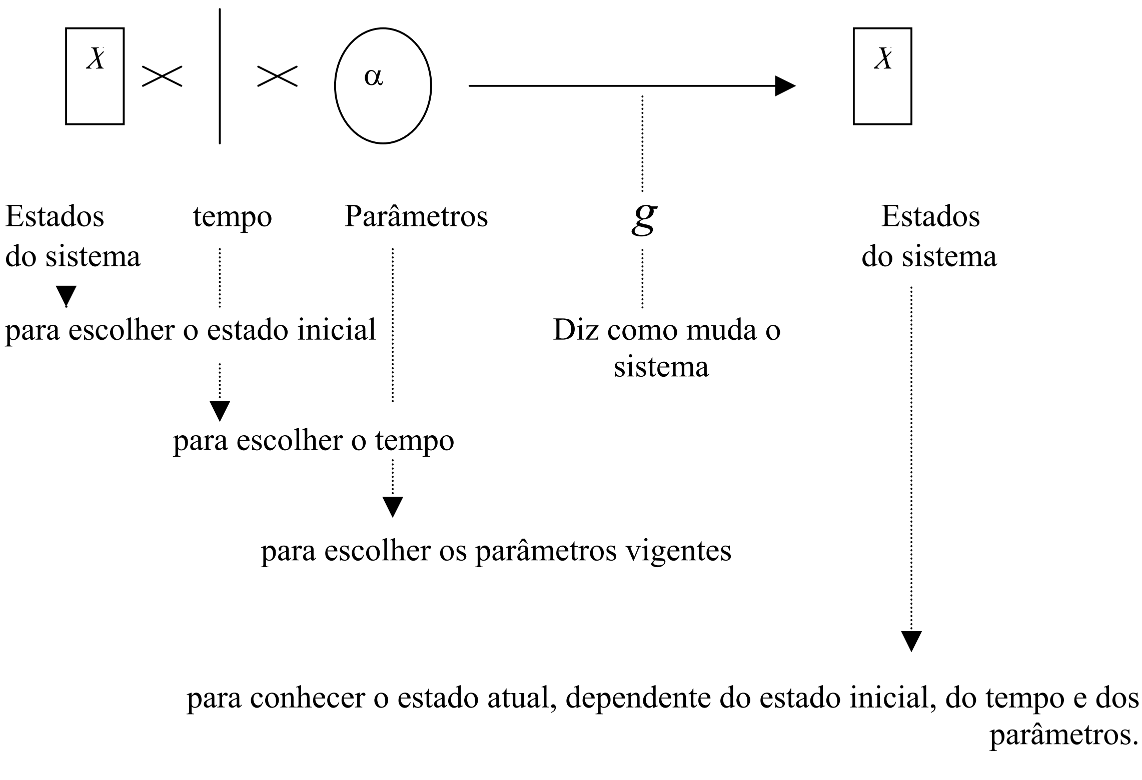

Figura 3: Representação esquemática de um sistema dinâmico parametrizado.

A seguir trataremos do conceito de solução de uma equação de diferenças de primeira ordem do tipo $x_{t+1} = f\left(t, x_t; \alpha\right)$ (6) , onde x_t é um vetor de um espaço euclidiano. Primeiramente colocaremos as idéias e depois a formalização.

Uma **solução** da equação (6) é uma seqüência ou caminho no tempo $\{x_t\}$ do vetor de estado x que satisfaz (6) para todos os valores inteiros de t, ou para algum subconjunto, por exemplo, $t = 0,1,2,...,\infty$. A seqüência $\{x_t\}$ é chamada *órbita* ou *trajetória.* Intuitivamente, uma equação como a (6) diz-nos como x evolui de período em período, enquanto a seqüência solução $\{x_t\}$ descreveria a trajetória de x no tempo como uma função das variáveis exógenas do modelo, mais do que como uma função dos próprios valores prévios de *x*..

Se é dado o valor inicial x^0 do vetor de estados, é fácil construir a seqüência solução, e, por iteração, obter a função de transição dos estados ou fluxo do sistema. Assim:

$$x_1 = f(0, x^0, \alpha) \equiv g(0, x^0, \alpha)$$
$$x_2 = f(1, x_1, \alpha) = f[1, f(0, x^0, \alpha); \alpha] \equiv g(1, x^0; \alpha)$$
$$x_3 = f(2, x_2, \alpha) = f[2, f(1, x_1, \alpha); \alpha] \equiv g(2, x_1; \alpha)$$
$$\vdots$$
$$x_{t+1} = f(t, x_t, \alpha) = f[t, g(t-1, x^0, \alpha); \alpha] \equiv g(t, x^0; \alpha)$$

Algumas propriedades básicas da função de transição se derivam imediatamente da observação que *g* é definida pela composição iterativa de *f* com ela própria. Se *f* está é uma função bem definida, existe solução única para cada x^0 dado. Mais ainda, se *f* é continua, *g* também é continua; se *f* é diferenciável, a solução x_t dependerá suavemente de α e x^0.

Observando a construção da seqüência solução vemos que a solução de um sistema dado de equações de diferença não é único, pois depende do valor inicial x^0 do vetor de estado. Por exemplo, na equação *vii* do exemplo 2, se tomamos $I_t = 1$ para cada *t* , cada valor inicial do estoque de capital K_0 gerará uma trajetória de estoques de capital diferentes, embora paralelas. Esta situação conduz ao conceito de **problema de valores de contorno** (*boundary-value problem*) que estabelece a procura da solução da equação (6) tal que $x_s = x^0$ (6)', ou seja, especifica que a variável de estado *x* deve tomar o valor x^0 para *t=s.*

A condição $x_s = x^0$ assumida corresponde a um tipo particular de problema de valor de contorno, chamado **problema de valor inicial** , que especifica o valor da variável de estado em algum ponto considerado inicial. A escolha do dito ponto inicial depende mais de considerações econômicas que matemáticas.

Embora uma equação de diferença pode eventualmente ter infinitas soluções, o problema de valores de contorno determina que, sendo *f* uniavaliada na equação (6), a solução é única. O problema de valor inicial toma a trajetória que passa pelo ponto x^0 no tempo *s*. Por iteração na eq. (6) calcularíamos $x_{s+1}, x_{s+2,}$.... a partir de *t=s*.

Devemos distinguir a solução geral da equação (6) das diferentes soluções particulares. A **solução geral** de (6) descreve a família de todas as seqüências que satisfazem a equação, isto é, o conjunto

$$x_t^g = x(t;c;\alpha) = \left\{ \left\{ x_t \right\} \mid x_{t+1} = f(t, x_t; \alpha)\ \forall t \in D(c,\alpha) \right\}$$

onde D é algum subconjunto de Z, conjunto dos números inteiros; e c é um vetor constante e arbitrário que indexa a família de seqüências $\left\{ x_t \right\}$ que são soluções da equação (6).

Pode-se ser achada uma forma explícita da solução geral e é dada uma condição inicial apropriada, teremos uma descrição completa do comportamento do sistema no tempo. Então será fácil ver como o sistema responde a variações dos valores dos parâmetros. Tais soluções explícitas estão disponíveis somente para certas classes de sistemas lineares. Para sistemas não-lineares, em geral, não estão disponíveis soluções explícitas e teremos que acudir ao estudo de aspectos qualitativos do comportamento das soluções das equações.

Formalizaremos estes conceitos e enunciaremos os teoremas que proporcionam as principais propriedades.

Definição7: Seja a equação em diferença $x_{t+1} = f(t, x_t; \alpha)$ (6) , onde $f : I \times X \times \Omega \subseteq \mathbf{R}^{1+n+p} \to X$; sendo $X \subseteq \mathbf{R}^n$; I um conjunto de inteiros consecutivos (para abreviar chamaremos I de "intervalo") e $\Omega \subseteq \mathbf{R}^p$.

Uma solução particular da equação (6) é uma seqüência $\overline{x} : J_{\overline{x}} \to X$ definida em algum $J_{\overline{x}} \subseteq I \to$, chamado seu *conjunto ou intervalo de definição* , tal que $\overline{x}_{t+1} = f(t, \overline{x}_t; \alpha)\ \forall t \in J_{\overline{x}}$. A solução geral da equação (6) é o conjunto de todas as soluções particulares, ou seja,

$$x_t^g = \left\{ \phi(t) : J_{\overline{x}} \to X \mid \overline{x}_t = f(t, \overline{x}_t; \alpha)\ \forall t \in J_{\overline{x}}; J_{\overline{x}} \subseteq \mathrm{I} \right\}$$

Cada solução particular de (6) esta associada a um problema de calor inicial.

Definição 8: Dada uma solução $\overline{x}_t$ da equação (6) definida no intervalo $I_{\overline{x}} \subseteq \mathrm{Z}$, chamamos de órbita do problema dinâmico discreto induzida por $\overline{x}_t$ ao conjunto

$$\gamma(\overline{x}) = \overline{x}(J_{\overline{x}}) = \left\{ x \in X; x = \overline{x}(t) \text{ para algum } t \in J_{\overline{x}} \right\}$$

Observemos que as órbitas são conjuntos discretos.

Teorema de existência e unicidade de soluções para o problema de valores de contorno de sistemas dinâmicos discretos parametrizados:

Teorema 1: Seja $f : I \times X \times \Omega \supseteq \mathbf{R}^{1+n+p} \to \mathbf{R}^n$ uma função bem definida e I um conjunto de inteiros consecutivos. Então, o problema de valores de contorno

$$x_{t+1} = f(t, x_t, \alpha)\ ,\quad x_s = x^0 \qquad [\mathrm{PD}((s, x^0, \alpha))]$$

tem uma seqüência solução $\overline{x}_t$ para cada $(s, x^0, \alpha) \in I \times X \times \Omega$. Esta solução está definida num conjunto maximal $J_m(s, x^0, \alpha) \subseteq I$ que contem s e depende do estado inicial e dos parâmetros do problema. Ainda, a solução é única para todo $t \geq s$, no sentido que se y_t é uma solução do [PD((s, x^0, α))] definida em algum conjunto J_y, então $J_y \subseteq J_m(s, x^0, \alpha)$ e $\overline{x}_t =$ y_t para todo $t \in J_y$ com $t \geq s$.

Formulemos os conceitos e resultados semelhantes para equações diferenciais.

Consideremos o sistema continuo no tempo $\dot{x} = f(x, \alpha, t)$ (7) , onde f transforma algum subconjunto de $X \times \Omega \times I$ de $\mathbf{R}^{n+p-1}$ no conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$, e I é um intervalo da reta real.

Definição 9: Uma solução particular de (7) é uma função diferenciável $\phi : J_\phi \to X$, definida em algum intervalo $J_\phi \subseteq I$, que satisfaz a equação (9) em J_ϕ, isto é, tal que

$$\phi'(t) = f\left[\phi(t), \alpha, t\right] \forall t \in J_\phi$$

Definição 10: A *órbita* do sistema dinâmico continuo (7) , induzida pela solução particular $\phi(t)$, é o conjunto

$$\gamma(\phi) = \phi(J_\phi) = \left\{x \in X; x = \phi(t) \text{ para algum } t \in J_\phi\right\}$$

Observação:

- A órbita é a trajetória determinada no espaço dos estados *X*, pela solução particular ϕ. Ou seja, é o conjunto imagem da aplicação ϕ sobre o domínio J_ϕ. A órbita nos permite "visualizar" o movimento do sistema no tempo.

Chamaremos *problema de valore inicial* ao problema da determinação da uma solução particular ϕ da equação (9) tal que, para $t_0 \in J_\phi$ e $x^0 \in X$, fixos, tem-se $\phi(t_0) = x^0$.

O seguinte teorema estabelece a existência e unicidade da solução do problema de valor inicial para um sistema dinâmico continuo:

Teorema 2: Seja $f : X \times I \times \Omega \supseteq \mathbf{R}^{n+p+1} \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 no conjunto $X \times I \times \Omega$, onde X e Ω são conjuntos abertos e I é um intervalo aberto de $\mathbf{R}$. Então o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x, \alpha, t)\ ,\ x(t_0) = x^0$$

tem uma única solução $\phi(t) = \phi(t, x^0, t_0, \alpha)$ para cada $(t, x^0, t_0, \alpha) \in X \times I \times \Omega$ definido num intervalo aberto maximal $J_m(x^0, t_0, \alpha) \subseteq I$ contendo t_0, que depende dos dados iniciais e dos parâmetros do sistema. Isto é, se $\Psi(t)$ é uma solução do problema de valor inicial, definida em algum intervalo J_Ψ, então $J_\Psi \subseteq J_m\left(x^0, t_0, \alpha\right)$ e $\Psi(t) = \phi(t)$ para todo $t \in J_\Psi$. Ainda, o *fluxo* do sistema, $\phi(t, x^0, t_0, \alpha)$ é de classe C^1.

Da unicidade neste teorema pode-se inferir que as soluções particulares de uma equação diferencial não se cruzam, no sentido que duas trajetórias não podem passar pelo mesmo ponto ao mesmo tempo.

Agora abordaremos os chamados *sistemas autônomos.*

Sistemas Autônomos:

Um sistema dinâmico é dito autônomo se a variável tempo, *t*, não aparece como argumento separado em *f*, ou seja, se a equação (6) toma a forma

$$x_{t+1} = f(x_t, \alpha) \qquad (8)$$

Intuitivamente, um sistema autônomo modela a situação em que o comportamento do sistema muda no tempo, mas as "características estruturais" permanecem as mesmas, com independência do tempo. A unicidade da solução no problema de valores de contorno implica que as trajetórias de duas soluções diferentes não podem passar pelo mesmo ponto ao mesmo tempo. Mas é possível que as trajetórias de duas soluções diferentes passem pelo mesmo ponto em tempos diferentes. A causa é que na equação (6), $x_{t+1} = f(t, x_t; \alpha)$, o campo vetorial f depende, além do estado atual x_t, do tempo *t*.

Vejamos uma interpretação geométrica da equação autônoma (8). Definamos o conceito de diferença:

<u>**Definição 10**</u>**:** Seja x uma função de *t*, *t*=0,1,2,3,....

a) A primeira diferença de x_t, denotada Δx_t, é a variação em *x*, quando *t* varia de *t* a *t*+1, ou seja, $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$. Analogamente são definidas as diferenças de ordem superior.

b) A segunda diferença de x_t é: $\Delta^2 x_t = \Delta(\Delta x_t) = \Delta x_{t+1} - \Delta x_t = x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t$

c) A *k-ésima* diferença de x_t é $\Delta^k x_t = \Delta(\Delta^{k-1} x_t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!i!}(-1)^i x_{t+k-i}$

Para ver a interpretação geométrica de (6) basta a primeira diferença. Subtraindo x_t de ambos os lados de (6) resulta $x_{t+1} - x_t = f(t, x_t; \alpha) - x_t$

Seja $d(t, x_t; \alpha) \equiv f\left(t, x_t; \alpha\right) - x_t$. Então (6) ficaria rescrita como

$$\Delta x_t = d\left(t, x_t; \alpha\right) \qquad (9)$$

Uma forma de resumir a informação dada pela equação (6) é associar a cada ponto *x* do espaço dos estados *X* o vetor $d\left(t, x_t; \alpha\right)$ com origem em x_t. A função *d* é chamada campo vetorial (uma aplicação cujo domínio e contradomínio são conjuntos de vetores é denominada *campo vetorial*)

Podemos dar à equação (6) uma interpretação física natural, pensando que (6) descreve o movimento de uma partícula que pula em cada período de tempo de um ponto para outro num espaço n-dimensional. Num dado ponto no tempo, o valor do vetor de estado x_t descreve a posição da partícula e $\Delta x_t = d\left(t, x_t; \alpha\right)$ descreve o próximo pulo. Dada uma posição do sistema em um certo tempo, nos temos unicamente que seguir as flechas para determinar a trajetória futura. A figura 4 ilustra isto.

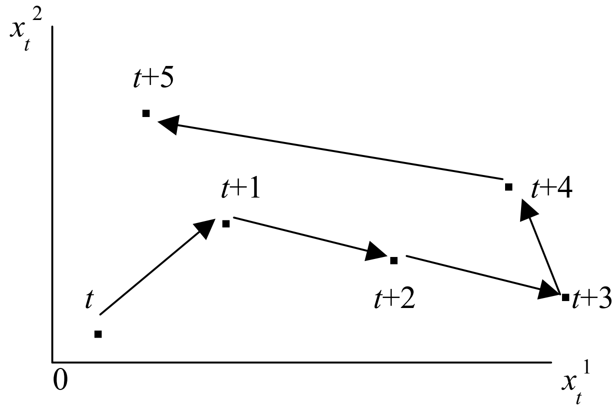

Figura 4: Uma trajetória particular.

Nas figuras (5) e (6) comparamos o que pode acontecer com as trajetórias em um sistema autônomo e em um não-autônomo.

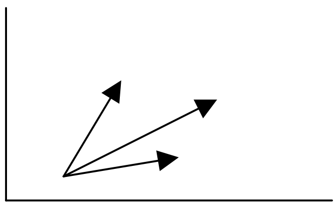

Fig. 5: Sistema não-autônomo
Em tempos diferentes, varias trajetórias
Podem passar pelo mesmo ponto

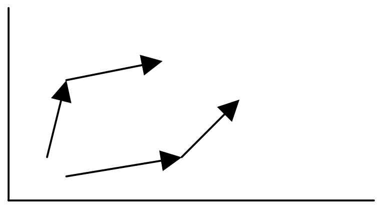

Fig. 6: Sistema autônomo
Uma única trajetória solução
pode passar por cada ponto de *X*.

Dada uma condição de valor inicial (*initial condition*) em t=0, por iteração em (8) podemos calcular a seqüência solução:

$$x_1 = f(x^0; \alpha)$$

$$x_2 = f(x_1; \alpha) = f[f(x^0); \alpha] \equiv f^2\left(x^0; \alpha\right)$$

$$\vdots$$

$$x_{t+1} = f(x_t; \alpha) = f[f^t(x^0); \alpha] \equiv f^{t+1}\left(x^0; \alpha\right)$$

onde f^n denota a n-ésima iteração de aplicação *f*. A função de transição

$$x(t;x^0;\alpha)=f^t\left(x^0;\alpha\right) \qquad (10)$$

é, as vezes, chamada de **fluxo do sistema** *(flow of the system)*. Lembremos que também é chamada de função de transição dos estados. Esta função nos da o valor do vetor de estado em função dos parâmetros do sistema, a posição inicial e o tempo.

Definamos alguma terminologia adicional:

A **órbita positiva de (8) através de** x^0 é o conjunto:

$$\gamma^+(x^0;\alpha)=\left\{x_t\in X \mid x_t=f^t\left(x^0;\alpha\right), t=0,1,2,...\right\}=\left\{x^0, f\left(x^0;\alpha\right), f^2\left(x^0;\alpha\right),...\right\}$$

Se a aplicação f é inversível podemos escrever $x_t=f^{-1}(x_{t+1})$ e, retrocedendo iterativamente desde o ponto inicial, construir a **órbita negativa**

$$\gamma^-(x^0;\alpha)=\left\{x_t\in X \mid x_t=f^t\left(x^0;\alpha\right), t=0,-1-,2,...\right\}=\left\{x^0, f^{-1}\left(x^0;\alpha\right), f^{-2}\left(x^0;\alpha\right),...\right\}$$

Finalmente, definimos a órbita de (8) através de x^0 como a união $\gamma^+\cup\gamma^-$, supondo que γ^- esteja bem definida:

$$\gamma\left(x^0;\alpha\right)=\gamma^+\left(x^0;\alpha\right)\bigcup\gamma^-\left(x^0;\alpha\right)=\left\{x_t\in X \mid x_t=f^t\left(x^0;\alpha\right), t=0,\pm1,\pm2,...\right\}$$

Muitas questões econômicas podem ser colocadas em termos das propriedades das seqüências soluções , os fluxos e as órbitas. Dado um sistema autônomo $x_t=f(x_t;\alpha)$, nos gostaríamos de determinar primeiramente como o sistema se comporta no tempo para um dado valor do parâmetro α. Já sabemos que este problema não tem uma solução geral. Para sistemas com pequenas dimensões, as propriedades qualitativas podem ser estudadas graficamente nos diagrama de face.

De particular importância resulta o **comportamento asintótico** (*asymptotic or long-run behavior*) das soluções do sistema. Em muitos casos ao menos uma solução $\left\{\overline{x}_t\right\}$ do sistema dado tem um comportamento simples quando $t\to\infty$. Veremos os conceitos de *steady state* e equilíbrio periódico e introduziremos o conceito de estabilidade.

Outro assunto de interesse é a determinação das variações do comportamento do sistema perante mudanças nos valores de certos parâmetros que descrevem políticas vigentes ou traços básicos da tecnologia ou das preferências, que ficam subjacentes na aplicação *f.*

Steady State, equilíbrio periódico e estabilidade.

Consideremos um sistema autônomo $x_{t+1}=f(x_t)$ (1.14) onde *f* é uma função contínua, e seja $\left\{x_t\right\}$ uma seqüência solução tal que $x^*=\lim_{t\to\infty}x_t$. Da continuidade de *f* segue que x^* é uma solução de (1.14),

$$x^* = \lim_{t\to\infty} x_{t+1} = \lim_{t\to\infty} f(x_t) = f(\lim_{t\to\infty} x_t) = f(x^*)$$

Daqui, soluções constantes têm um papel especial na análise do comportamento dos sistemas dinâmicos autônomos. Elas merecem um nome especial.

<u>Definição 10:</u> (Steady State ou **ponto fixo)**
Um ponto $\bar{x} \in X$ é um *steady state* do sistema $x_{t+1} = f(x_t)$ se é um ponto fixo da aplicação *f*, ou seja, se $\bar{x} = f(\bar{x})$.

Os estados estacionários ou pontos fixos de sistemas dinâmicos autônomos não-lineares são valores da variável de estado que serão preservados perpetuamente se forem atingidos. Estes pontos de repouso correspondem naturalmente à noção econômica de equilíbrio no longo prazo, isto é, posições assintóticas que a economia pode alcançar em resposta ao equilíbrio, resultante da soma de todas as forças externas atuantes sobre ela. Existem condições suficientes para a estabilidade que serão estudadas posteriormente.

Há duas formas de definir o conceito de estabilidade para um ponto fixo de um sistema dinâmico:

<u>Definição 11:</u> O estado $\bar{x}$ é um ponto fixo estável (ou estável segundo Liapunov) da aplicação *f* se:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $\|x_s - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x_t - \bar{x}\| < \varepsilon$ para todo inteiro $t \geq s$.

O sentido desta definição é mostrado na figura 1.3(a). Considerando a bola de radio δ centrada em $\bar{x}$; $\bar{x}$ é estável se qualquer órbita $\{x_t\}$ que entre na δ-bola em algum tempo *s* permanece sempre dentro da bola de radio ε centrada em $\bar{x}$.

<u>Definição 12:</u> (Estabilidade assintótica) .
O estado $\bar{x}$ é assintoticamente estável se ele é estável e se a constante δ na última definição pode ser escolhida de forma tal que, se $\|x_s - \bar{x}\| < \delta$ para algum *s*, então $\|x_t - \bar{x}\| \to 0$ quando $t \to \infty$.

Em outras palavras, trajetórias que em algum ponto alcançam a vizinhança de $\bar{x}$ além de "permanecer perto" se aproximam assintoticamente do *steady state*, como ilustra a figura 1.3(b). A maior vizinhança a partir da qual qualquer órbita que entre converge assintoticamente ao steady state é chamada **região de estabilidade assintotica de** $\bar{x}$ (*basin of attraction* ou *region of asymptotic stability de* $\bar{x}$ *)* . Se esta região coincida com o espaço X, de modo que toda trajetória possível converge a $\bar{x}$, dizemos que o *steady state* é **globalmente assintoticamente estável .**

Nem toda órbita estável é assintoticamente estável; trajetórias periódicas, como as dos planetas em volta do sol. As órbitas periódicas são o tipo mais simples de solução dos sistemas periódicos, depois dos *steady states*.

Vejamos a figura 7.

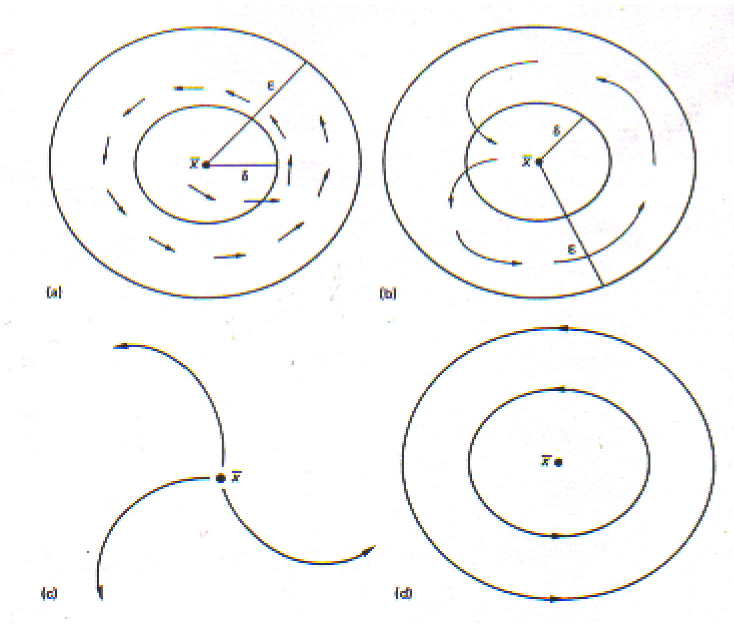

Figura 7: (a) $\bar{x}$ é estável. (b) $\bar{x}$ é assintoticamente estável. (c) $\bar{x}$ é instável. (d) $\bar{x}$ é estável, mas não é assintoticamente estável.

Referências Bibliográficas:

[1] Fuente de la, Angel. *Mathematical Methods and Models for economists.* Cambridge University Press. 2000.

[2] Azariadis Costas. *Intertemporal Macroeconomics*.

[3] Shone, Ronald. 1997. *Economic Dinamics*. Cambridge. University Press.

[4] Chiang, Alpha C. 1999. *Elements of Dynamic Optimization.* Waveland Press.