

# VOLATILIDADE IMPLÍCITA VERSUS VOLATILIDADE ESTATÍSTICA: UMA AVALIAÇÃO PARA O MERCADO BRASILEIRO A PARTIR DOS DADOS DE OPÇÕES E AÇÕES DA TELEMAR S.A.<sup>1</sup>

João Gabe<sup>2</sup>

Marcelo S. Portugal<sup>3</sup>

## Resumo

A partir de uma base de dados de ações da Telemar S.A. para o período de 21/09/1998 a 21/10/2002, e de opções desta mesma empresa para o período de 02/10/2000 a 21/10/2002, foi avaliada a precisão na previsão da volatilidade futura usando-se as volatilidades implícita e estatística. A volatilidade implícita foi obtida por indução retroativa da fórmula de *Black-Scholes*. As previsões estatísticas da volatilidade foram obtidas pelos modelos de média móvel ponderada igualmente, GARCH, EGARCH e FIGARCH. Os resultados das regressões do conteúdo de informação revelam que a volatilidade implícita ponderada possui substancial quantidade de informações sobre a volatilidade um passo à frente. Porém, a estatística *Wald* revela que os modelos EGARCH e FIGARCH são previsores eficientes e não viesados da variação absoluta dos retornos da Telemar S.A. entre  $t$  e  $t + 1$ . Nas regressões do poder de previsão, que testam a habilidade da variável explicativa em prever a volatilidade ao longo do tempo de maturidade da opção, os resultados rejeitam a hipótese da volatilidade implícita ser um melhor previsor da volatilidade futura. No teste de previsor eficiente e não viesado, a estatística *Wald* não rejeita esta hipótese para o modelo FIGARCH. Isto significa que um modelo que toma os dados *ex-post* consegue prever a volatilidade futura com maior precisão do que um modelo de natureza *forward looking*, como é o caso da volatilidade implícita. Desse modo, é melhor seguir a volatilidade estatística, expressa pelo modelo FIGARCH, para prever com maior precisão o comportamento futuro do mercado.

Palavras Chave: Volatilidade; Opções; Variância Não-Condiciona; FIGARCH; *Black-Scholes*.

Classificação no J.E.L.: C130; C220; C520; C530.

## 1 INTRODUÇÃO

A previsão da volatilidade pode ser gerada utilizando diferentes modelos. De uma forma genérica, a previsão da volatilidade pode apresentar diferentes resultados, dependendo do modelo utilizado e das condições de mercado. Mesmo se somente um tipo de modelo for sempre usado, as previsões dependerão da escolha dos parâmetros. Quando os mercados são estáveis, as diferenças entre várias previsões são relativamente pequenas.

A maioria dos modelos de previsão da volatilidade estatística se apóia no comportamento passado dos preços dos ativos, ou seja, são, por natureza, de indução retroativa. Por outro lado, a

---

<sup>1</sup> Gostaríamos ainda de agradecer o auxílio dos bolsistas de iniciação científica Amanda Pimenta (CNPq), Gustavo Russomanno (CNPq) e Júlia C. Klein (FAPERGS).

<sup>2</sup> Mestre em Economia pelo Programa de Pós-Graduação em Economia da UFRGS. Pesquisador do Banco do Brasil S. A. (joaogabe.voy@terra.com.br)

<sup>3</sup> Professor do Programa de Pós-Graduação em Economia da UFRGS e pesquisador do CNPq. (msp@ufrgs.br)

avaliação de uma opção é realizada olhando-se para frente, pois o preço de uma opção depende das expectativas dos agentes econômicos quanto à volatilidade futura. Logo, muitos economistas argumentam que, se os mercados de opções forem eficientes, a volatilidade implícita derivada do preço de uma opção deve ser um melhor preditor de mercado da volatilidade futura do que aquela derivada de modelos baseados em dados históricos. A volatilidade implícita contém a crença dos participantes do mercado sobre futuros eventos, e incorpora informações que não são estritamente históricas, tal como a publicação num futuro próximo de novos indicadores de política econômica.

Como a volatilidade só pode ser apurada no contexto de um modelo, torna-se muito difícil calcular a precisão dessas estimativas e previsões. Segundo *Alexander* (2001, p. 118-119), se alguém decidir realizar o difícil problema de avaliar a previsão, três considerações devem ser levadas em conta:

“..., the first consideration is: which volatility is being forecast?... Future volatility is an extremely difficult thing to forecast because the actual realisation of the future process volatility will be influenced by events that happen in the future... The second consideration is the choice of a benchmark forecast. The benchmark volatility forecast could be anything, implied volatility or a long-term equally weighted average statistical volatility being the most common... A third consideration is, which type of volatility should be used for the forecast? Since both implied and statistical volatilities are forecasts of the same thing, either could be used... Price process volatilities could be forecast by statistical or implied volatilities, or indeed both”.

Muitas pesquisas têm sido publicadas na tentativa de determinar qual o estimador que prediz com maior eficiência a volatilidade dos mercados financeiros. Os resultados apresentados não são conclusivos, pois o resultado final depende do modelo de precificação da opção utilizado para extrair a volatilidade implícita e do modelo estatístico usado para analisar os dados históricos.

*Day e Lewis* (1992), que estudaram o índice de opções *S&P 100* com expiração de 1985-1989, e em *Lamoureux e Lastrapes* (1993), que examinaram opções de dez ações negociadas na *Chicago Board Options Exchange (CBOE)* com expiração de 1982 a 1984, concluíram que a volatilidade implícita é viesada e ineficiente, e que a volatilidade passada contém informação preditiva sobre volatilidade futura além do que está contido na volatilidade implícita. Esses resultados são uma rejeição da hipótese conjunta de eficiência do mercado e dos modelos de precificação de opções da classe *Black-Scholes*. Porém, segundo *Christensen & Prabhala* (1998), ambos estudos usam amostras sobrepostas e, adicionalmente, são caracterizados por um problema “maturity mis-match”, pois *Lamoureux & Lastrapes* (1993) examinam o poder preditivo da volatilidade implícita um dia à frente e *Day & Lewis* o examinam uma semana à frente, computado de opções que possuem tempo de maturidade muito maior (129 dias de negociação no teste de *Lamoureux e Lastrapes* e 36 dias de negociação em *Day e Lewis*).

Mais forte ainda são as evidências de *Canina & Figlewski* (1993), que, também utilizando o mercado de índice de opções *S&P 100* (dados incluem somente o período anterior a outubro de 1987), encontraram que a volatilidade implícita não tem qualquer correlação com o retorno futuro da volatilidade e não incorpora a informação contida na mais recente volatilidade observada.

Por outro lado, igualmente utilizando o índice de opções *S&P 100* com um ciclo de expiração de um mês, de 11/1983 a 05/1995, *Christensen & Prabhala* (1998) encontraram que a volatilidade implícita tem uma melhor performance do que a volatilidade histórica na previsão da volatilidade futura. A divisão dos dados em antes e após o *crash* no mercado norte-americano, em outubro de 1987, evidência que foi essa quebra estrutural que levou a volatilidade implícita ser mais viesada antes do que após o *crash*.

Nesta mesma linha, segue o estudo de *Fleming* (1998), que também examina a performance da volatilidade implícita do índice *S&P 100* como um preditor da futura volatilidade no mercado de ações. Usando uma amostra de preços históricos dessas opções transacionadas na *Chicago Board Options Exchange*, de outubro de 1985 a abril de 1992, seus resultados indicaram que a volatilidade implícita é um preditor viesado positivamente, mas que contém relevantes informações sobre a volatilidade futura. A volatilidade implícita domina a taxa de volatilidade histórica em termos do poder de previsão *ex-ante*, e seu erro de previsão é ortogonal aos parâmetros freqüentemente ligados à volatilidade condicional, incluindo aqueles empregados em várias especificações ARCH. Esses resultados sugerem que um modelo linear com correção para o viés da volatilidade implícita pode providenciar um útil estimador de mercado da volatilidade condicional.

*Jorion* (1995) investiga a informação contida e o poder preditivo da volatilidade implícita em opções de câmbio futuro. A informação contida é medida em termos da habilidade da variável explicativa em prever a volatilidade um passo à frente. Testes do poder preditivo focam-se na volatilidade ao longo dos dias restantes do contrato de opção. Desvios padrões implícitos são regredidos contra modelos de séries de tempo, tal como uma média móvel e um GARCH (1,1). Para obter máxima eficiência dentro de um limitado período amostral, observações diárias são usadas e erros padrões são corrigidos para os dados sobrepostos.

Em contraste com as opções de índice de ações, *Jorion* (1995) encontrou que modelos estatísticos de séries de tempo, mesmo quando dada a vantagem de estimar parâmetros *ex-post*, são ultrapassados em performance pela previsão implícita de opções. Porém, mesmo quando contabilizando para possíveis erros de medida e problemas estatísticos, as volatilidades implícitas são estimadores viesados positivamente da volatilidade futura.

*Taylor & Xu* (1995) realizam similares resultados para opções de câmbio à vista negociadas na *Philadelphia Stock Exchange* (PHLX). Nesse artigo, a performance relativa da predição da volatilidade implícita e da volatilidade histórica é comparada para quatro taxas de câmbio de 1985 a 1991. Para três moedas, os modelos ARCH estimados até 1989 mostram que a volatilidade implícita PHLX providencia especificação para variâncias condicionais diárias que não podem ser significativamente melhoradas usando retornos passados. Para o autor, esse resultado é consistente com o critério de eficiência informacional do mercado de opções de câmbio. Nas previsões fora da amostra temos que, novamente, previsores implícitos são superiores aos previsores históricos.

*Aguilar* (1999) propõe avaliar a informação contida e o poder preditivo da volatilidade implícita de opções de câmbio da Coroa Sueca contra o Dólar e o Marco Alemão. Seu interesse era analisar se a volatilidade implícita em opções em um pequeno mercado de câmbio periférico, tal como o da Suécia, teria uma igual performance em prever a volatilidade futura como a volatilidade implícita de opções de câmbio de “moedas fortes”. Opções de câmbio em pequenos países são menos negociadas, que pode resultar em uma menor eficiência no preço das opções, fazendo volatilidade implícita destas opções um previsor menos confiável. Seus resultados apontam que a volatilidade implícita tem uma melhor performance na previsão da volatilidade futura do que a previsão da volatilidade obtida dos dados históricos.

Para o mercado brasileiro, *Andrade & Tabak* (2001) verificam se as evidências da literatura recente, que indicam que preços de opções embutem informação sobre volatilidade futura do retorno dos ativos que não pode ser extraída de retornos passados, também se aplicam para as opções de compra da taxa diária de câmbio Dólar-Real negociadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), no período de 02 de fevereiro de 1999 a 02 de junho de 2000. O modelo de precificação de opção utilizado é o padrão *Garman-Kohlhagen* (1983)<sup>4</sup> – extensão do modelo *Black-Scholes*. Como modelos baseados em dados históricos, usaram o desvio-padrão da média móvel com uma janela móvel de 20 dias e um modelo GARCH (1,1).

Seus resultados sugerem que a volatilidade implícita no preço das opções de compra US\$/R\$, recuperada pelo uso do modelo de precificação de opção *Garman-Kohlhagen*, contém informação sobre a subsequente volatilidade realizada que não está presente nos retornos passados. Concluem ainda que é válido seguir a volatilidade implícita Dólar/Real para inferir sobre a volatilidade futura, pois previsões que somente utilizam retornos passados não são eficientes, no sentido que elas não incorporam toda informação pública disponível. Consistente com os outros trabalhos

---

<sup>4</sup> *Garman-Kohlhagen* (1983) *apud Andrade e Tabak* (2001).

existentes na literatura, também encontraram que o melhor estimador da volatilidade futura é a volatilidade implícita e que esta é viesada positivamente.<sup>5</sup>

Seguindo esta literatura, este artigo pretende avaliar qual o melhor previsor da volatilidade futura. Desta forma, o problema básico será investigar se a volatilidade implícita prevê com maior precisão o futuro do que a volatilidade estatística ou vice-versa. Para tanto, serão realizados testes do conteúdo de informação e de poder de previsão das volatilidades. O conteúdo de informação é medido em termos da habilidade da variável explicativa em prever a volatilidade um passo à frente. Testes do poder de previsão, ao contrário, concentram-se na volatilidade ao longo do tempo de maturidade da opção.

Ao contrário do trabalho de *Andrade & Tabak* (2001), que utiliza as opções de dólar comercial, as quais têm pouca liquidez e geralmente referem-se a operações de balcão, neste estudo a avaliação do melhor previsor será realizada a partir da opção mais negociada no mercado brasileiro, as opções da Tele Norte Leste Participações S.A.. Além disso, utilizar-se-á modelos estatísticos mais sofisticados. Um ativo com alta liquidez, associado à utilização de critérios robustos à geração das séries de previsão das volatilidades, devem resultar em indicadores mais eficientes, que reflitam com maior precisão o comportamento do mercado. Os resultados apontam a volatilidade implícita como um modelo capaz de prever a volatilidade do dia seguinte com maior habilidade, apesar de viesada. Contudo, quanto à capacidade de prever a volatilidade futura ao longo do tempo de vida da opção, a volatilidade estatística (expressa pelo modelo FIGARCH) superou a volatilidade implícita sendo, inclusive, eficiente e não viesada.

## 2 ESPECIFICAÇÃO DOS TESTES DE CONTEÚDO DE INFORMAÇÃO E PODER DE PREVISÃO

Seguindo a literatura,<sup>6</sup> os testes econométricos para avaliação das volatilidades foram realizados pela estimação de dois conjuntos de regressões. Seja  $\sigma_{t,+1}$  a volatilidade realizada ao longo do próximo dia de transação da ação (VOL1DIA) definida como

$$\sigma_{t,+1} = |R_{t+1}|, \quad (1)$$

onde  $|R_{t+1}|$  é o retorno do ativo-objeto entre  $t$  e  $t + 1$  em módulo. Para que esta volatilidade resulte em uma estimativa anual, ela deve ser multiplicada por  $\sqrt{252}$ . Assim, para verificar a habilidade

---

<sup>5</sup> O artigo de *Gomes* (2002), testa se as volatilidades implícitas em opções de Telebrás e de Dólar Comercial fornecem informações úteis sobre retornos de grande magnitude no futuro, isto é, se essas volatilidades implícitas têm o poder de prever eventos futuros de *stress*. Desse modo, o autor escolhe como o melhor estimador da volatilidade futura a volatilidade implícita nessas opções, pois as maiorias dos estudos até agora demonstram ser este o melhor previsor.

<sup>6</sup> *Jorion* (1995), *Navatte e Villa* (2000), *Alexander* (2001), *Andrade e Tabak* (2001), entre outros.

da(s) variável(eis) explicativa(s) prever a volatilidade entre  $t$  e  $t + 1$ , isto é, o conteúdo de informação, é computada a seguinte regressão:

$$\sigma_{t,t+1} = \alpha_0 + \beta_1 \hat{\sigma}_t + u_t, \quad (2)$$

onde  $\hat{\sigma}_t$  é a previsão da volatilidade um passo à frente, que pode ser tanto o estatístico como o implícito, e  $u_t \sim IIN(0,1)$ .<sup>7</sup> Se o  $\beta_1 \neq 0$  na equação acima, significa que o previsor contém alguma informação sobre a volatilidade do dia seguinte. O  $R^2$  (coeficiente de determinação) obtido na equação (2), pode também ser utilizado para inferir o poder de explicação da variável independente sobre a volatilidade um passo à frente.<sup>8</sup>

Além de verificar isoladamente qual a volatilidade que possui o maior conteúdo de informação, é possível realizar regressões múltiplas, onde se analisa a eficiência relativa dos previsores:

$$\sigma_{t,t+1} = \alpha_0 + \beta_1 \hat{\sigma}_t^{VI} + \beta_2 \hat{\sigma}_t^{VE} + u_t, \quad (3)$$

onde  $\hat{\sigma}_t^{VI}$  é a estimativa da volatilidade implícita e  $\hat{\sigma}_t^{VE}$  da volatilidade estatística. Se a volatilidade implícita é relativamente mais eficiente, seu coeficiente deve ser estatisticamente significativo e  $\beta_2 = 0$ .

Por outro lado, seja  $\sigma_{t,T}$  a volatilidade realizada ou futura medida do tempo  $t$  até  $T$  (VOLREALIZ), onde  $T$  é a data de expiração da opção e definida pelo desvio padrão ao longo desse período:

$$\sigma_{t,T} = \sqrt{\frac{1}{(T-t)} \sum_{i=1}^{T-t} (R_{t+i} - \bar{R}_{t+1})^2}, \quad (4)^9$$

onde  $\bar{R}_{t+1} = \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^{T-t} R_{t+i}$ . Para obter uma estimativa anual da volatilidade realizada basta multiplicar a equação (4) por  $\sqrt{252}$ .

O poder de previsão pode ser estimado regredindo a volatilidade realizada contra a previsão da volatilidade:

$$\sigma_{t,T} = \omega_0 + \delta_1 \hat{\sigma}_{t,T} + u_t, \quad (5)$$

onde  $\hat{\sigma}_{t,T}$  é o previsor implícito ou estatístico tomado em  $t$  até o vencimento  $T$  da opção.

<sup>7</sup> Nessa regressão a variável dependente não é sobreposta. Logo, os erros padrões podem ser computados por mínimos quadrados ordinários (OLS).

<sup>8</sup> Note que o horizonte de previsão da volatilidade implícita não é associado com a volatilidade futura um passo à frente. Logo, quando é computada esta volatilidade contra a volatilidade implícita, não se requer que este coeficiente de inclinação seja necessariamente unitário, somente positivo. Contudo, pode-se verificar a eficiência dos estimadores estatísticos, pois é possível conseguir previsões para o dia seguinte.

<sup>9</sup> Jorion (1995) e Andrade & Tabak (2001) utilizam no denominador da equação (4)  $N = (T - t)$ . Navatte & Villa (2000), Aguilar (1999) entre outros, expressam  $N = (T - t) - 1$ . Neste estudo optou-se por usar  $N = (T - t)$ .

Como no teste de conteúdo de informação, pode-se verificar a eficiência relativa do poder de previsão dos estimadores sobre a  $\sigma_{t,T}$  através de uma regressão múltipla similar à equação (3).

Um importante resultado surge da equação (5). Se  $\omega_0 = 0$  e  $\delta_1 = 1$ , resulta que o previsor utilizado nessa regressão é eficiente e não viesado.

A variável dependente na equação (5) tem ainda uma importante característica. Os dados utilizados são diários e, então, a frequência de observações é menor do que o período coberto pelo contrato de opções, isto é, o horizonte de previsão. Como consequência, os resíduos são autocorrelacionados serialmente e, portanto, os erros padrões computados por OLS são viesados negativamente. Para solucionar este problema, bem como para gerar erros padrões robustos, é utilizado o procedimento de *Newey & West* (1987) em todas as regressões que envolvem a variável  $\sigma_{t,T}$ .

### 3 ESPECIFICAÇÃO DOS PREVISORES

#### 3.1 VOLATILIDADE IMPLÍCITA

Volatilidade implícita é a previsão da volatilidade ao longo do tempo de maturação de uma opção que iguala o preço da opção observado no mercado com o preço teórico de um modelo de precificação de opção.

A  $\sigma^{VI}$  pode ser usada para:

- a) monitorar a opinião do mercado sobre a volatilidade de certa ação, que varia com o tempo;
- b) transformar preços de ativos em volatilidades e, a partir destas, negociar ou interpolar vencimentos e/ou maturidades para retornar preços consistentes com os mais líquidos do mercado;
- c) calcular o preço de uma opção a partir do preço de outra opção;
- d) testar a eficiência do mercado de opções, ou seja, se os preços das opções incorporam instantaneamente toda a informação disponível, a volatilidade implícita deve ser o melhor previsor da volatilidade futura.

Assim, se o preço de mercado de uma opção de compra  $c$  pode ser obtido, juntamente com o preço do ativo  $S$ , o preço de exercício  $K$  (valor pelo qual o comprador da opção terá o direito de adquirir o ativo-objeto), a taxa de juro livre de risco  $r$ ,<sup>10</sup> o tempo de maturidade da opção  $n$ , pode-

---

<sup>10</sup> A taxa de juros livre de risco  $r$  na forma contínua é transformada para o caso brasileiro, onde se usa a taxa de juros efetiva anual  $i$  por dias úteis, com base em 252 dias úteis por ano, da seguinte forma:  $r = \ln(1 + i)$ .

se *back out* a volatilidade implícita utilizando a fórmula de *Black-Scholes* para uma *call* adaptada ao mercado brasileiro, conforme explicitada na equação (6):<sup>11</sup>

$$c(S,t) = SN(d_1) - \frac{K}{(1+i)^{n/252}} N(d_2), \quad (6)$$

onde  $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\ln(1+i) + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(n/252)}{\sigma\sqrt{n/252}}$ , e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\frac{n}{252}}.$$

De fato, a volatilidade implícita é somente o inverso do preço da opção no sentido do teorema de função inversa. Logo, utilizando a equação de *Black-Scholes*, a volatilidade implícita será igual a:

$$\sigma^{VI} = f(c, K, S, T - t, r). \quad (7)$$

Contudo, não existe uma forma fechada à solução da equação acima, mesmo quando o modelo de precificação da opção tem uma forma analítica. Portanto, é utilizado o método numérico para descobrir a volatilidade como uma função implícita de variáveis conhecidas.<sup>12</sup>

### 3.2 VOLATILIDADE ESTATÍSTICA

Uma das principais características da volatilidade implícita é sua natureza de *forward looking*. Isto significa que o preço de uma opção depende da volatilidade futura esperada ao longo do horizonte de sua maturidade. Ao contrário, a volatilidade estatística depende da escolha de um modelo estatístico que é aplicado aos dados históricos dos retornos do ativo, geralmente um modelo de série de tempo, sendo, por natureza, *backward looking*.

Aplicando o modelo aos dados históricos, originam-se estimativas estatísticas da volatilidade passada. Simultaneamente, geram-se previsões da volatilidade de agora até algum ponto futuro no tempo, chamado de o tempo de horizonte.

Nesse sentido, as subseções subseqüentes descrevem duas classes de modelos: os de média móvel e os derivados da família GARCH. Posteriormente serão utilizados para gerar previsões de volatilidade estatística, as quais serão objeto de comparação com a volatilidade implícita para verificar qual delas possui maior poder de previsão e conteúdo de informação sobre os retornos da ação Telemar S.A..

<sup>11</sup> Vale ressaltar que a equação (6) vai gerar, para cada opção negociada, uma estimativa anual da volatilidade implícita.

<sup>12</sup> O *software* utilizado para *back out* a volatilidade implícita, neste estudo, foi o *MAPLE 7*.



### 3.2.1 Modelos de Média Móvel

Os modelos de média móvel são classificados como modelos de volatilidade constante, pois se referem à volatilidade não condicional do processo de retornos de um ativo. Isto implica que  $\sigma$  é uma constante finita, a mesma ao longo de todo o processo de geração dos dados. Ela pode ser definida em termos da variância da distribuição não condicional de um processo de retornos estacionário.<sup>13</sup> Uma das propriedades de uma série estacionária é que ela tem uma variância não condicional ( $\sigma^2$ ) finita. Logo, a variância desta distribuição é a variância não condicional e sua raiz quadrada é a volatilidade não condicional.

Uma das formas de derivar a volatilidade não condicional é através de uma média móvel igualmente ponderada.<sup>14</sup> Formalmente, uma estimativa não viesada da variância não condicional no tempo  $t$ , usando os  $n$  mais recentes retornos diários é

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_{t-i} - \bar{R}_t)^2}{n-1}, \quad (8)$$

onde  $R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ ,  $\bar{R}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{t-i}$  e  $S_t$  é o preço diário do ativo em  $t$ . Para converter

$\hat{\sigma}_t^2$  em uma estimativa de volatilidade anual, aplica-se a fórmula abaixo:

$$\text{Volatilidade anual} = \sqrt{\hat{\sigma}_t^2} \sqrt{252}. \quad (9)^{15}$$

Para fins de padronizar a notação, os modelos de média móvel igualmente ponderados serão citados ao longo deste estudo como  $MA(n)$ , onde  $n$  é o número de dias da janela móvel.

Um importante problema ocorre nos  $MA(n)$ : a ocorrência de eventos extremos. Uma das formas de resolver este problema é colocar mais peso nas observações mais recentes, através de uma média móvel ponderada exponencialmente (EWMA). Quando o EWMA é aplicado aos retornos ao quadrado, um retorno extremo gradualmente diminui ao longo do tempo. A persistência desse evento ao longo do tempo será determinada por uma constante de alisamento  $\lambda$ , sendo  $0 < \lambda < 1$ . Quanto maior o valor de  $\lambda$ , mais peso é colocado nas observações passadas

---

<sup>13</sup> Particularmente, a variância não condicional somente é definida se a série de retornos do ativo é gerada por um processo estocástico estacionário, ou seja, se for rejeitada a hipótese de raiz unitária. Como os retornos são definidos como a primeira diferença do log dos preços do ativo, não deve causar surpresa nenhuma se esta hipótese for rejeitada.

<sup>14</sup> Geralmente, é denominada de volatilidade histórica a previsão estatística a partir de médias móveis igualmente ponderadas.

<sup>15</sup> A equação (9) será utilizada tanto para converter variâncias incondicionais como condicionais em volatilidade anual. O fator de anualização – 252, refere-se ao período de dias úteis ao ano utilizado pelo mercado brasileiro.

e então, mais suave a série torna-se. A estimativa da variância ponderada exponencialmente dos retornos ao quadrado é<sup>16</sup>

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2. \quad (10)$$

Reescrevendo esta fórmula em sua forma recursiva:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) R_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2. \quad (11)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (11) determina a intensidade de reação da volatilidade para eventos do mercado. O segundo termo determina a persistência na volatilidade. Porém, uma importante restrição dos modelos EWMA é que a reação e a persistência não são independentes, pois a soma dos seus termos é igual a um.

Outro problema em utilizar o EWMA surge do fato de que diferentes valores de  $\lambda$  produzem diferentes previsões. Na prática, o mercado financeiro usa um valor de 0,94 para o  $\lambda$ , que produz resultados similares a um MA(20)-MA(25). Adicionalmente, a equação (11) é similar ao modelo IGARCH, sem o termo constante.<sup>17</sup> Desse modo, apesar do amplo uso desse predictor estatístico pelas instituições financeiras, optou-se por desconsiderá-lo para fins de análise de qual é o melhor predictor da volatilidade futura, pois considera-se ser mais prudente e robusto seguir uma previsão paramétrica da volatilidade.

### 3.2.2 Modelos GARCH

Os modelos de volatilidade que usam o método de médias móveis ponderadas descritos acima assumem que os retornos dos ativos são independentes e identicamente distribuídos. Não existe a hipótese da volatilidade variando no tempo. Eles somente providenciam uma estimativa da volatilidade não condicional, a qual é constante, e a estimativa corrente é tomada como uma previsão. Essas estimativas não mudam ao longo do tempo. Caso isso ocorra, isto é devido a um ruído ou erros amostrais nos modelos de média móvel. Não existe nestes modelos qualquer variação na volatilidade.

Entretanto, os retornos de ativos financeiros não são apropriadamente modelados por um processo independente e identicamente distribuído. Nesse sentido, os modelos de volatilidade variando no tempo descrevem um processo para a volatilidade condicional. Uma distribuição condicional, neste contexto, é uma distribuição que é condicionada a um conjunto de

<sup>16</sup> Em dados de alta frequência, como as séries financeiras diárias, tornou-se padrão na literatura supor que média dos retornos é zero e, portanto, basear as variâncias somente a partir dos retornos ao quadrado.

<sup>17</sup> Modelo IGARCH será descrito nas próximas subseções.

informações, e a volatilidade condicional no tempo  $t$  é a raiz quadrada da variância da distribuição condicional no tempo  $t$ .

Os modelos de variância condicional heteroscedástica, chamados também de modelos de volatilidade, são reconhecidamente interessantes para analisar o comportamento da volatilidade nas séries financeiras, pois possuem propriedades que procuram explicar alguns dos fatos estilizados de variáveis econômicas e financeiras: a) a distribuição não-condicional dos retornos possui caudas grossas em relação à distribuição Normal; b) variâncias que mudam a cada período de tempo; c) para alguns tipos de retornos, a volatilidade reage de maneira diferenciada se os preços estão aumentando ou declinando. Geralmente, as subidas são lentas e as quedas são abruptas – denotando uma volatilidade maior.

Encontrar essas evidências para o caso dos retornos de ativos financeiros é importante não apenas para uma melhor formulação teórica de modelos que descrevem o comportamento dessas séries e para as aplicações destes em seleção de portfólios e precificação de ativos, mas também para a avaliação dos riscos de um investimento.

Nesse contexto, Engle (1982) propõem uma estrutura alternativa especificamente designada para modelar e prever a variância condicional: modelos ARCH – *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, onde o primeiro e o segundo momento da série são modelados de forma conjunta. Desde então, diversas extensões do modelo original foram propostas na literatura, bem como diferentes métodos de estimação e testes para a presença de erros tipo ARCH:<sup>18</sup> GARCH, EGARCH, GJR, IGARCH, FIGARCH, ...

### 3.2.2.1 Modelo ARCH

O modelo ARCH (q) pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sigma_t, \\ z_t &\sim i.i.d. D(0,1), \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \end{aligned} \tag{12}$$

onde  $D(\cdot)$  é a função de densidade de probabilidade com média zero e variância unitária. Para garantir que a variância condicional seja positiva para todo  $t$  são impostas restrições quanto aos sinais dos coeficientes:  $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 (i = 1, \dots, q)$ .

---

<sup>18</sup> Os erros tipo ARCH podem ser verificados através do teste ARCH-LM. Este teste é um multiplicador de Lagrange para heteroscedasticidade condicional auto-regressiva nos resíduos (Engle (1982)). Através de uma regressão auxiliar:  $\varepsilon_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}^2 + v_t$ , onde  $\varepsilon$  é o resíduo, é computado o teste estatístico ARCH-LM =  $TR^2$ , em que  $T$  é o número de observações e o  $R^2$  é obtido da regressão auxiliar. Sob  $H_0: \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$ , o teste ARCH-LM é assintoticamente distribuído como  $\chi_{q-1}^2$ .

O modelo ARCH pode descrever a aglomeração de volatilidade. A variância condicional de  $\varepsilon_t$  é uma função crescente do quadrado do choque que ocorreu em  $t - 1$ . Logo, se  $\varepsilon_{t-1}$  era grande em valor absoluto, espera-se que  $\sigma_t^2$  e (portanto)  $\varepsilon_t$  também sejam grandes em valor absoluto. A ordem de defasagem de  $q$  determina o período de tempo que o choque persiste em condicionar a variância de erros subseqüentes. Quanto maior o valor de  $q$ , mais longos são os episódios de volatilidade. O excesso de kurtose, que é observado em praticamente todas as séries de tempo financeiras, pode também ser explicado pelo modelo ARCH.

### 3.2.2.2 Modelo GARCH

Da experimentação empírica com modelos da classe ARCH ( $q$ ), tornou-se aparente que a ordem do modelo ajustado era muito grande –  $q$  grande. Numa analogia direta com modelos da classe  $AR(p)$ , onde a solução parcimoniosa é incluir termos  $MA(\cdot)$  – formando um modelo  $ARMA$ , o processo  $ARCH(q)$  foi generalizado para incluir esses “termos  $MA(\cdot)$ ”. Esta é a motivação por trás do modelo GARCH ( $p, q$ ), proposto por *Bollerslev* (1986). Assim, os modelos GARCH – *General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, estendem a formulação ARCH no sentido de que permitem uma memória mais longa e uma estrutura de defasagens para a variância mais flexível. Estes modelos também podem ser utilizados para entender a relação entre a volatilidade e os retornos esperados:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2, \quad (13)$$

onde as restrições são agora dadas por  $q > 0$ ,  $p > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , ( $i = 1, \dots, q$ ), e  $\beta_i \geq 0$ , ( $i = 1, \dots, p$ ). Se  $p = 0$ , o modelo se reduz a um ARCH ( $q$ ) e se  $p = q = 0$ , então  $\varepsilon_t$  é um ruído branco. Para que o processo seja bem definido, é requerido

também que  $\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \beta(L)} + \frac{\alpha(L)\varepsilon_t^2}{1 - \beta(L)}$  seja não negativo, e que as raízes do polinômio  $(1 - \beta(L)) = 0$  estejam fora do círculo unitário.

### 3.2.2.3 Modelo EGARCH

O modelo exponencial GARCH – EGARCH, foi introduzido por *Nelson* (1991) para tratar com três básicas carências nos modelos da classe GARCH. Primeiro, o impacto de choques na volatilidade é simétrico nestes modelos. Portanto, choque positivo ou negativo tem exatamente o mesmo efeito na variância condicional. Como muitas aplicações dos modelos da classe GARCH são em finanças, e nestes dados é observado que os efeitos de retornos positivo ou negativo na

volatilidade não é identificado, é desejável conceber modelos que admitem estimação e testes para assimetria. Segundo, a restrição  $\alpha_0 > 0, \alpha_i, \beta_i \geq 0, \forall i$ , em (13), restringe as raízes características do polinômio dos modelos GARCH, prevenindo movimento oscilatório em  $\sigma_t^2$ . Terceiro, medidas de persistência de choques na variância condicional para processos IGARCH dependem da norma considerada, e nenhuma analogia direta pode ser feita com resultados de raiz unitária na literatura.

Assim, em algumas séries (como o retorno de ações), a volatilidade subsequente a um choque negativo seria maior que a gerada por choque positivo. Este fenômeno ficou conhecido como “*leverage effect*”. *Bollerslev e Mikkelsen* (1996) reescreveram o modelo EGARCH com vistas a captar esse tipo de assimetria:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln \sigma_{t-i}^2, \quad (14)$$

onde  $g(z_t) = \theta_1 z_t + \theta_2 [|z_t| - E|z_t|]$  e  $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ , isto é, o resíduo padronizado. O valor de  $E|z_t|$  depende da hipótese feita na densidade não condicional de  $z_t$ .

Neste modelo, é dada maior flexibilidade à equação da variância permitindo que ela capture alguma assimetria na relação entre retornos de mercado e a volatilidade condicional. O modelo é assimétrico devido à existência do coeficiente  $\theta_1$  em  $g(z_t)$ , que capta o efeito *leverage*, onde choques de retornos positivos geram menor volatilidade do que choques de retornos negativos. O segundo coeficiente de  $g(z_t) - \theta_2$ , capta o efeito de magnitude, ou seja, grandes erros provocam maiores impactos na volatilidade, sejam eles de valores positivos ou negativos.

### 3.2.2.4 Modelo GJR

Outro modelo que visa captar o efeito *leverage* foi proposto por *Glosten, Jagannathan e Runkle* (1993):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i S_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (15)$$

onde  $S_{t-i}^-$  toma o valor 0 se  $\varepsilon_t$  é positivo e 1 quando  $\varepsilon_t$  é negativo. Desta forma, o impacto de  $\varepsilon_t^2$  em  $\sigma_t^2$  vai ser diferente quando  $\varepsilon_t$  é positivo ou negativo.

### 3.2.2.5 Modelo IGARCH

Em muitas aplicações de séries de tempo financeiras de alta frequência, a variância condicional estimada utilizando um modelo *GARCH*(p, q), como o descrito pela equação (13), exhibe uma forte persistência, isto é,

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \approx 1.$$

Reescrevendo a equação (13) como:<sup>19</sup>

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) \quad (16)$$

Quando o polinômio  $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$  tem uma raiz unitária,<sup>20</sup> ou seja,  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ ,

resulta no modelo Integrado GARCH (IGARCH) de *Engle e Bollerslev* (1986). Os autores denominaram o modelo acima de integrado na variância se  $\alpha_0 = 0$  e integrado na variância com tendência se  $\alpha_0 > 0$ .

Neste modelo a informação corrente permanece importante para a previsão da volatilidade em qualquer horizonte de tempo. Então, se o modelo básico GARCH for estendido para admitir uma raiz unitária na variância condicional, esse processo Integrado GARCH - IGARCH, admite que choques tenham um efeito permanente na variância condicional.

Por último, a partir da soma dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  no modelo GARCH -  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = \gamma$ ,

pode-se quantificar o grau de influência da persistência da volatilidade nos retornos através do cálculo da meia-vida.<sup>21</sup>

### 3.2.2.6 Modelos FIGARCH

Como mostrado em *Ding, Granger e Engle* (1993), entre outros, choques na variância condicional tendem a persistir por um longo intervalo de tempo. No entanto, a distinção entre processos I(0) e I(1) parece ser muito restritiva. A propagação de choques em um processo I(0) decresce a uma taxa exponencial – tal que ele captura somente a curta memória -, enquanto que num processo I(1) a persistência de choques é infinita.

Na média condicional, a especificação ARFIMA<sup>22</sup> (modelo ARMA com Integração Fracionária) foi proposta para preencher o espaço entre modelos de persistência curta e longa, tal que o comportamento de curto prazo da série é descrito pelos parâmetros ARMA, enquanto que o parâmetro de diferença fracionária admite a modelagem da dependência de longo prazo.

<sup>19</sup> Deve-se primeiro acrescentar o termo  $[1 - \beta(L)]\varepsilon_t^2$  em ambos os lados da equação (13).

<sup>20</sup> Neste caso, o processo da variância condicional é não estacionário.

<sup>21</sup> A meia-vida mede o período de tempo necessário para que o efeito de um choque na volatilidade diminua até a metade, e é dada por  $\lambda = 1 - \left[ \frac{\log 2}{\log \gamma} \right]$ , onde  $\gamma$  é a persistência.

<sup>22</sup> Uma descrição completa dos modelos ARFIMA pode ser vista em *Greene* (2000), p. 785.

Neste contexto, *Baillie, Bollerslev e Mikkelsen (1996)* (doravante denotados por *BBM*), sugeriram modelos GARCH com Integração Fracionária – FIGARCH. O modelo FIGARCH (p, d, q) é dado por:

$$\sigma_t^2 = \underbrace{\frac{\alpha_0}{[1 - \beta(L)]}}_{\omega} + \underbrace{\{1 - \phi(L)[1 - \beta(L)]^{-1}(1 - L)^d\}}_{\lambda(L)} \varepsilon_t^2, \quad (17)$$

ou de forma mais concisa:

$$\sigma_t^2 = \omega + \lambda(L)\varepsilon_t^2, \quad (18)$$

com  $0 \leq d \leq 1$ . Note que  $\lambda(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i L^i$ , a qual, na prática, tem de ser truncada. *BBM* propõem truncar  $\lambda(L)$  em 1000 defasagens.

Existem importantes diferenças na dissipação da persistência para  $d = 0$  e  $0 < d < 1$ . No caso dos processos GARCH, os choques decaem a uma taxa exponencial – mais rapidamente, enquanto que no modelo FIGARCH efetivam-se a uma taxa hiperbólica. Se  $d = 1$ , obtém-se o modelo IGARCH, no qual os choques são permanentes.

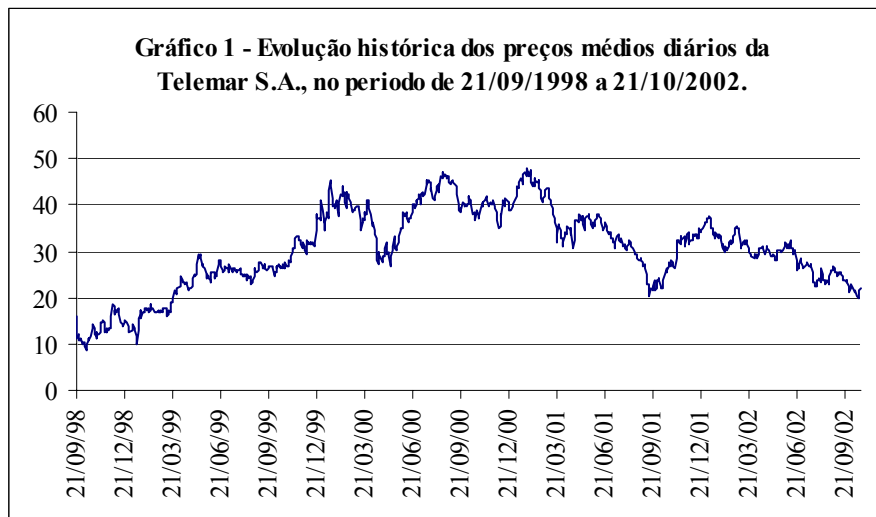
#### 4 DESCRIÇÃO DOS DADOS

As avaliações empíricas das volatilidades implícita e estatística propostas na seção dois foram realizadas sobre uma base de dados de opções e o correspondente ativo-objeto negociados na Bovespa.<sup>23</sup>

Os preços médios diários históricos das ações preferências da empresa Tele Norte Leste Participações S.A., registradas na Bovespa sob o código TNLP4 (referida neste estudo como Telemar S.A.), no período de 21 de setembro de 1998 a 21 de outubro de 2002, constituem a base de dados do ativo-objeto. Os retornos diários são calculados pela primeira diferença do logaritmo dos preços médios diários. Os gráficos 1 e 2 apresentam a evolução histórica dos preços médios (por lote de mil ações) e do retorno diário desse ativo, respectivamente.

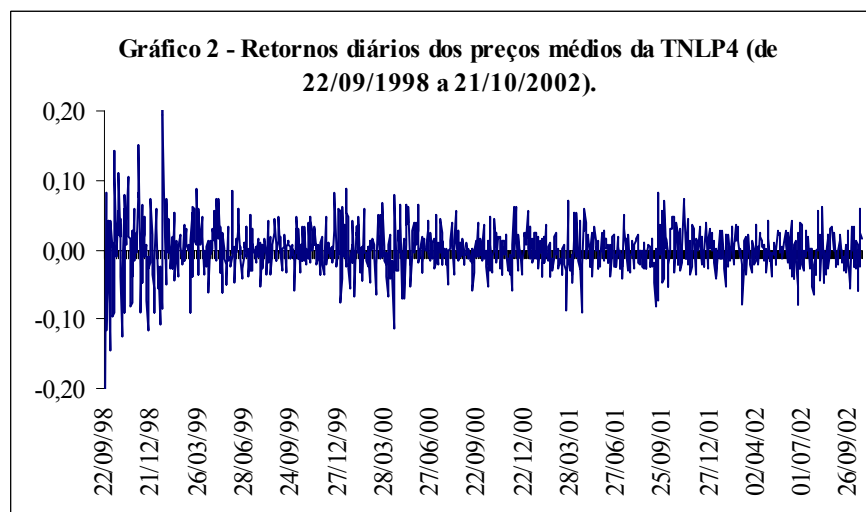
A cotação mais alta das ações TNLP4 ocorreu no dia 31/01/2001, ao valor médio de R\$ 47,14. A mais baixa aconteceu em 09/10/1998 a R\$ 9,84, poucos dias após o processo de privatização do sistema Telebrás, do qual originou a Telemar S.A. em 21/09/1998. O maior retorno dessas ações foi no dia 15/01/1999 (data da mudança do sistema cambial brasileiro de fixo para flutuante), no valor 25,15%. O menor retorno foi observado em 01/10/1998, com um rendimento negativo de 14,45%.

<sup>23</sup> O intervalo de observações da base de dados é diário e é composto somente pelos dias em que efetivamente ocorreu negociação.



Fonte: Economática.

A figura 1 apresenta o histograma e um sumário estatístico desses retornos. Como pode ser visto, eles têm média próxima a zero e não são estatisticamente diferentes de zero. Os retornos têm problema de assimetria e kurtose, que indica a presença de caudas mais grossas que a distribuição Normal. O fato de a kurtose estar bem acima de três, significa que a cauda da distribuição dos retornos é muito maior do que a distribuição Normal. Números muito grandes para kurtose surgem do fato de que este coeficiente é bastante sensível a retornos elevados.

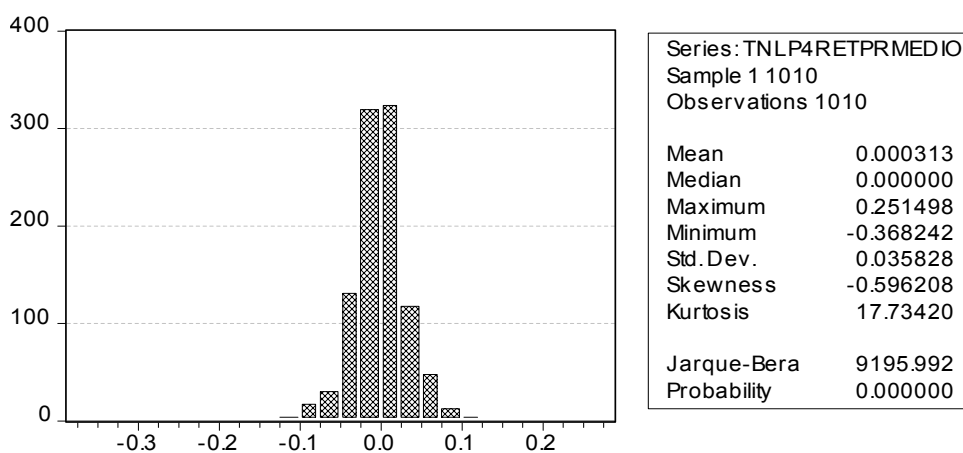


Fonte: Economática..

A existência de uma distribuição leptocúrtica pode ser comprovada pelo teste de Normalidade de *Jarque-Bera*, onde a hipótese de normalidade nos retornos é rejeitada. O teste *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) mostrou que a série de retornos diários é estacionária em nível, a 1% de significância.

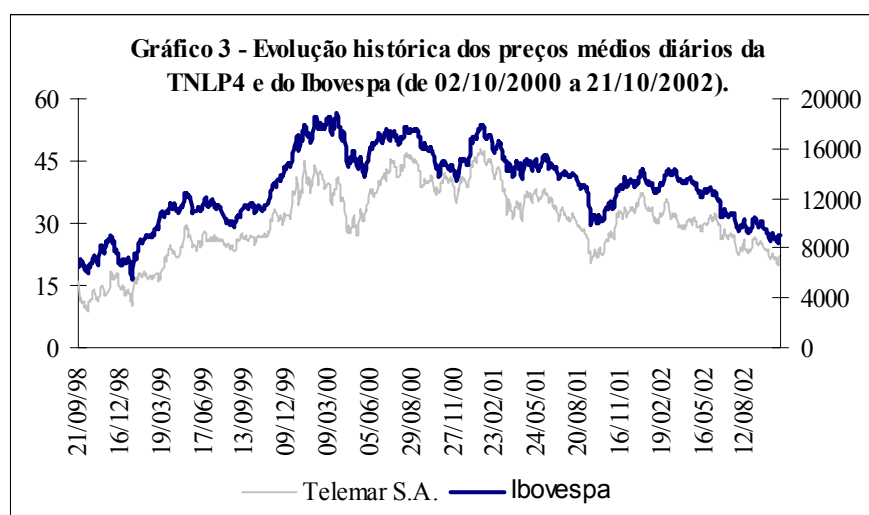


**Figura 1 – Histograma e sumário estatístico dos retornos sobre os preços médios diários da TNLP4.**



Fonte: Economática.

Além das ações TNLP4, também compõem a base de dados deste estudo as opções de compra referente ao período de 02/10/2000 a 21/10/2002, composta de todas as séries de opções de compra negociadas diariamente – aproximadamente 6.500 séries de observações.<sup>24</sup> Essa base de dados contém a data de negociação, o código da opção negociada,<sup>25</sup> especificação do ativo e valores de abertura, mínimo, máximo, médio, de fechamento, número de negócios, quantidade de títulos negociados e o respectivo volume financeiro para cada série de opção transacionada. Esse período importa em 13 ciclos de vencimento dos contratos de opções, os quais ocorrem sempre no primeiro dia útil da terceira semana nos meses pares.



Fonte: Economática.

<sup>24</sup> A fonte dos dados das opções de compra da Telemar S.A. foi o Banco do Brasil S.A. e a Solidus S.A. – Corretora de Câmbio e Valores Mobiliários.

<sup>25</sup> A partir do código da opção deduz-se o preço de exercício da opção negociada.

Por fim, a escolha das ações e opções da Telemar S.A. para avaliar empiricamente as volatilidades implícita e estatística é explicada por dois motivos. Em primeiro lugar, as ações da Telemar S.A. podem funcionar como uma *proxy* para o mercado acionário brasileiro, dada a alta correlação existente entre essas ações e o Índice Bovespa: correlação de 0,95 para o período de análise das volatilidades, que pode ser constatada pela observação do gráfico 3. Essa correlação pode ser devido a essas ações terem o maior peso no Índice – em torno de 14%.

Em segundo lugar, pode-se citar a alta liquidez dessas opções. No período analisado, o volume médio financeiro mensal de opções negociadas da Telemar S.A. foi de R\$ 490.967,8 mil, equivalentes a uma quantidade média por mês de títulos negociados de aproximadamente 500.493,2 mil. Esse volume financeiro representa em torno de 4% quando comparado ao volume médio financeiro da Bovespa.<sup>26</sup> Sendo assim, acredita-se que os resultados derivados da análise das opções de compra da Telemar S.A. não estejam muito distantes do comportamento geral do mercado e, portanto, podem ser utilizados como uma fonte de referência para o mercado brasileiro.

## 5 CÁLCULO DA VOLATILIDADE IMPLÍCITA

As volatilidades implícitas são derivadas do modelo *Black-Scholes* de precificação de opções européias. Em particular, o método numérico de indução retroativa da  $\sigma^{VI}$  foi efetivado através da equação (6), utilizando-se para tanto os preços médios das cotações diárias das opções de compra  $c$ , o preço médio da cotação diária do ativo-objeto  $S$ , o preço de exercício  $K$ , o prazo de vencimento da opção como uma proporção dos dias úteis ao ano  $\frac{T-t}{252}$ , e a taxa de juros dos Certificados de Depósitos Interbancários (CDI) anual e composta  $i$  como uma *proxy* da taxa de juros livre de risco  $r$ .<sup>27</sup>

Vale registrar que as opções de compra da Telemar S.A. são do tipo americano e, usando o modelo *Black-Scholes*, que supõem opção tipo européia, introduz um viés positivo na volatilidade implícita estimada. Entretanto, como destaca *Jorion* (1995), este viés é pequeno para opções de curta maturidade como é o caso das opções em análise, onde o intervalo das volatilidades estimadas implica uma amostra de opções com prazo de vencimento de no mínimo 4 dias até no máximo 47 dias. Além disso, como demonstra *HULL* (1997), p.177-181, opções de compra

<sup>26</sup> O volume médio financeiro da Bovespa no período de janeiro/1999 a outubro/2002 foi de R\$ 13.204.187,0 mil.

<sup>27</sup> A utilização da taxa CDI como uma *proxy* da taxa de juros livre de risco para o mercado brasileiro segue *Gomes* (2002) e *Motta* (2001). Contudo, o uso da taxa de juros implícita nos contratos futuros - os DIs futuro, ao invés da CDI, não gera viés algum no cálculo da volatilidade implícita, pois a correlação entre essas volatilidades é superior a 0,99. Essa perfeita correlação é devida ao curto intervalo de vencimento dos contratos das opções. Outra justificativa é a baixa sensibilidade da taxa de juros na fórmula de *Black-Scholes* à precificação de opções de ações.

americanas que não pagam dividendos ao longo do tempo de maturidade da opção, comportam-se como se fossem européias.<sup>28</sup>

Outro potencial erro de especificação pode ocorrer, pois o modelo *Black-Scholes* é inconsistente com volatilidade estocástica. *Jorion* (1995) conclui que o erro de precificação é muito pequeno para opções de curto prazo. Sendo assim, é limitado o ganho com modelos de volatilidade estocástica.

Por outro lado, um possível erro na estimação da  $\sigma^{VI}$  pode surgir a partir da utilização do valor de fechamento diário da opção, que pode ter sido significativamente influenciado pelo fechamento de posições a alguns minutos antes do término das operações na bolsa de valores. Nesse sentido, foram utilizados em todas as estimações das volatilidades sempre os preços médios, tanto das opções como do ativo-objeto.<sup>29</sup>

Entretanto, antes de computar as volatilidades implícitas alguns filtros nos dados foram efetivados. Primeiro, foram excluídas as opções que, em determinada data, tiveram negociações inferiores a 5% da quantidade total de títulos. Segundo, foram descartadas as opções de compra com um prêmio inferior a R\$ 0,05. Por último, dada as distorções que as opções apresentam quando estão muito próximas do seu vencimento, como volatilidade implícita extremamente alta e/ou tendendo a zero, optou-se por considerar somente as séries que contavam com 4 dias ou mais de negociação até o vencimento.<sup>30</sup>

Filtrados os dados, a volatilidade implícita foi calculada. Entre 02/10/2000 e 15/10/2002<sup>31</sup> foram obtidas 2.584 volatilidades, as quais correspondem a uma amplitude temporal de maturidade das opções de no máximo 47 dias a 4 dias.

Como diariamente são negociadas várias *calls* com preços de exercícios diferentes, mas de idêntico prazo de vencimento, surge o problema de se obter diferentes volatilidades implícitas para o mesmo ativo-objeto. Desse modo, foram determinadas três séries de volatilidades implícitas para fins de análise:

- a) uma série é a média ponderada das volatilidades implícitas pela quantidade total de títulos negociados diariamente, que será doravante denotada por VIPOND;
- b) outra resultou das opções *nearest-at-the-money* (VINEAREST);

---

<sup>28</sup> Como os dividendos ocorrem regularmente após a divulgação dos balanços semestrais, o mercado leva em conta os efeitos dos dividendos sobre a ação ao precificar a opção.

<sup>29</sup> O ideal para sincronizar os preços negociados seria utilizar uma pequena janela de dados, por exemplo, entre 14:30h e 15:00h.

<sup>30</sup> A escolha do número foi arbitrária. Geralmente o número sugerido na literatura é 6. Contudo, se fossem utilizadas as opções com até 6 dias de vencimento, a liquidez das opções para o próximo vencimento teriam sido praticamente inexistentes. Mesmo com até 4 dias, os dois primeiros dias antes do vencimento da série atual também teriam pouca liquidez, mas não apresentariam tantas distorções como as opções com 3 e 2 dias até o vencimento.

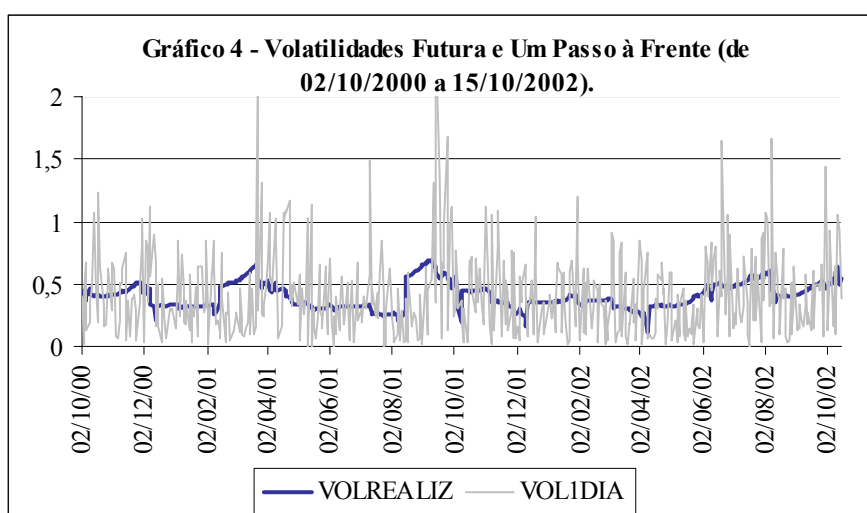
<sup>31</sup> Veja que o período final da amostra de opções seria 21/10/2002, se não tivesse sido aplicado o filtro nas opções.

c) a terceira são as volatilidades implícitas com a maior quantidade de títulos negociadas no dia, isto é, as de maior liquidez diária (VILQUIDA).

Dessa forma, cada série de volatilidade implícita resultou em 504 observações. A tabela 1 apresenta um sumário estatístico dessa volatilidade em conjunto com as volatilidades um passo à frente  $\sigma_{t,+1}$  e a realizada  $\sigma_{t,T}$ . Pode-se ver que a média das VILQUIDA e VIPOND são muito próximas, em torno de 53 % a.a., mas distantes das médias das  $\sigma_{t,+1}$  e  $\sigma_{t,T}$  (em torno de 40% a.a.). Interessante é o alto desvio padrão da  $\sigma_{t,+1}$ -sinaliza a existência de uma grande variabilidade nos retornos de um dia para outro. Essa grande dispersão pode também ser constatada pelo gráfico 4, que mostra a volatilidade um passo à frente e a volatilidade realizada.

**Tabela 1 – Sumário Estatístico das Volatilidades Implícitas e Realizadas**

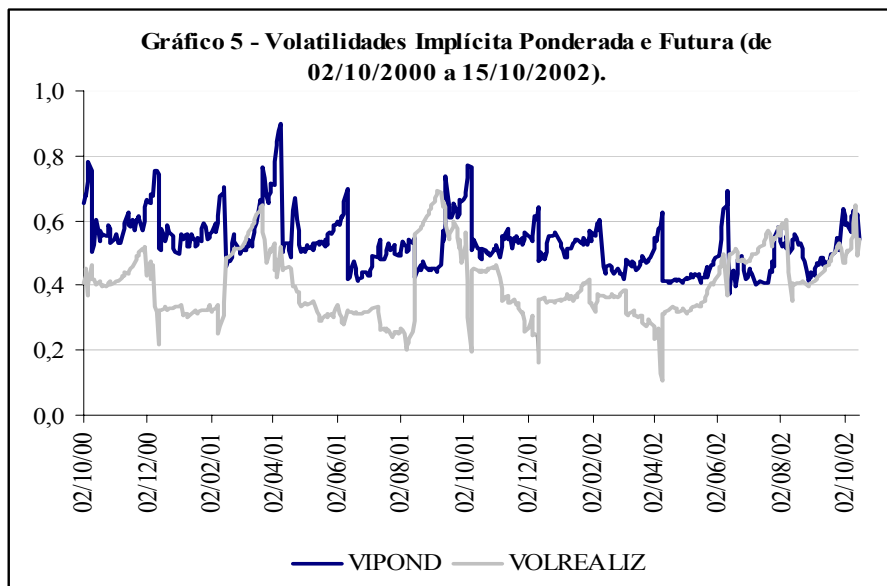
	VILQUIDA	VINEAREST	VIPOND	$\sigma_{t,+1}$	$\sigma_{t,T}$
Mean	0.527605	0.594293	0.529176	0.409881	0.403901
Median	0.519471	0.576888	0.521922	0.344440	0.385036
Maximum	0.897901	1.096130	0.896885	2.457607	0.691088
Minimum	0.379309	0.370473	0.373222	0.000337	0.106001
Std. Dev.	0.087288	0.117893	0.083665	0.335153	0.104748
Skewness	1.163570	0.930377	1.039367	1.591362	0.440278
Kurtosis	5.044150	4.059618	4.722955	7.592835	2.693605
Jarque-Bera	201.4768	96.28909	153.0839	655.7012	18.25438
Probability	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000109
Observations	504	504	504	504	504



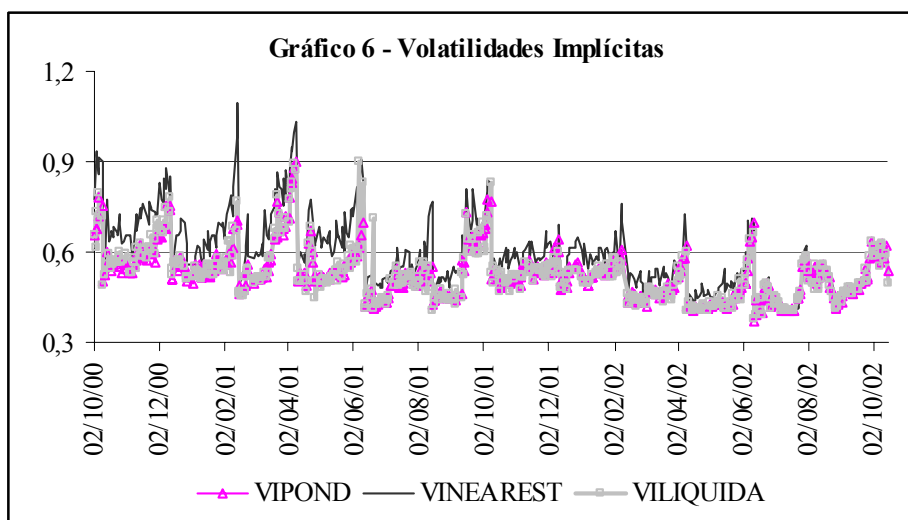
Fonte: Elaborado pelos autores.

O gráfico 5 mostra a VIPOND e a  $\sigma_{t,T}$ . Existem claros sinais de que em alguns momentos essas séries caminham juntas, enquanto que em outros elas mostram movimentos divergentes. De

fato, como ambas se referem a estimações de períodos equiparados, esperava-se uma forte correlação entre essas volatilidades, contudo este indicador é somente de 0,064.



Fonte: Elaborado pelos autores.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Enfim, o gráfico 6 apresenta as três séries de volatilidade implícitas. Verifica-se que a volatilidade *nearest-at-the-money* tem movimentos mais acentuados. Como são essas opções que possuem maior probabilidade de serem exercidas, esses picos de volatilidade devem ser um prêmio de risco maior requerido pelos lançadores.

## 6 ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DE VARIÂNCIA NÃO-CONDICIONAL

Os modelos de variância não condicional assumem que os retornos dos ativos são *I.I.D.* e, implicitamente, são estacionários – o teste *ADF* rejeitou a hipótese de raiz unitária para os retornos da Telemar S.A.. Logo, a volatilidade não varia no tempo. Sendo assim, eles geram uma estimativa da volatilidade não condicional corrente, a qual é tomada como uma previsão.

Desse modo, através das equações (8) e (9), e utilizando uma janela móvel de 10, 20 e 30 dias dos retornos passados, geraram-se, respectivamente, previsões dos modelos de média móveis igualmente ponderados – *MA(10)*, *MA(20)* e *MA(30)*, para o período de 02/10/2000 a 15/10/2002. Esses previsores estatísticos são os mais simples e ainda amplamente usados no mercado financeiro.

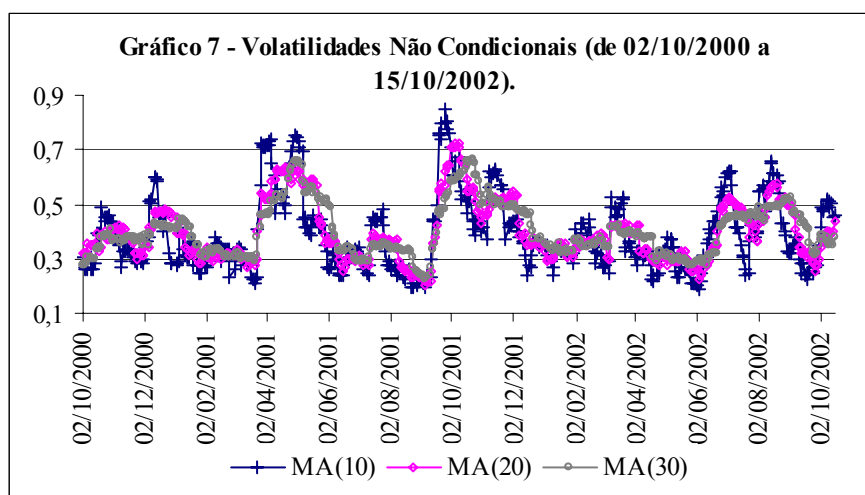
**Tabela 2 – Resumo Estatístico das Volatilidades Não Condicionais**

	<b>MA(10)</b>	<b>MA(20)</b>	<b>MA(30)</b>
Mean	0.390487	0.398269	0.401703
Median	0.349529	0.368665	0.377387
Maximum	0.848726	0.724395	0.663075
Minimum	0.184793	0.206147	0.227515
Std. Dev.	0.135439	0.109107	0.094526
Skewness	1.012171	0.782820	0.733028
Kurtosis	3.469666	2.893705	2.894318
Jarque-Bera	90.68948	51.71307	45.37031
Probability	0.000000	0.000000	0.000000
Observations	504	504	504

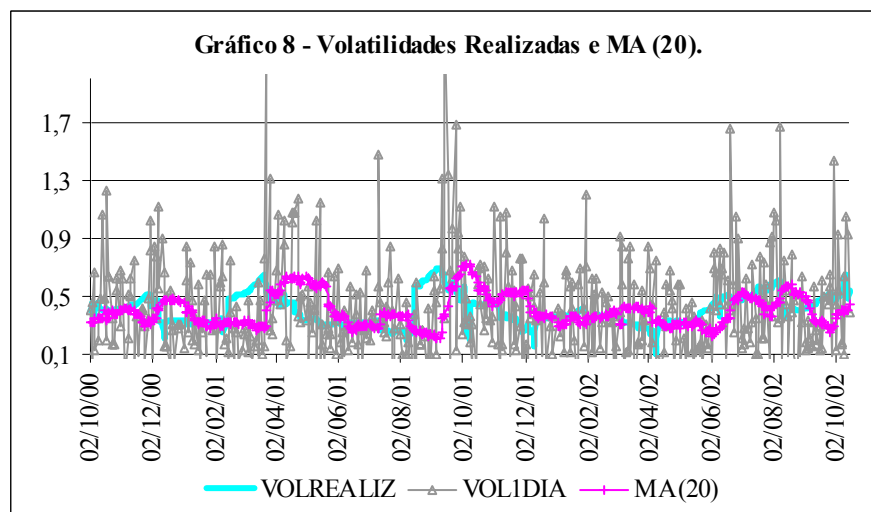
A tabela 2 apresenta um resumo estatístico dessas volatilidades. As estatísticas comprovam uma certa semelhança nas três séries, pois possuem uma volatilidade média em torno de 40% a.a.. A única clara divergência consiste no teste de normalidade *Jarque-Bera*, refletindo o fato de que o processo de geração dos retornos gera uma distribuição de caudas mais grossas quanto menor for a janela de dados históricos.

A característica dos modelos de média móvel ponderar igualmente todos os dados ao longo da janela pode ser constatada pelo gráfico 7, que retrata conjuntamente essas volatilidades, pois a série *MA(30)* é mais suavizada/alisada do que a *MA(10)* e a *MA(20)*.

O gráfico 8 mostra a relação existente entre as volatilidades realizadas um passo à frente, futura e *MA(20)*. Há claros sinais da baixa correlação entre essas variáveis.



Fonte: elaborado pelos autores.



Fonte: elaborado pelos autores.

## 7 ESTIMAÇÃO E PREVISÃO DOS MODELOS DE VOLATILIDADE CONDICIONAL

Ao contrário dos modelos de volatilidade não condicional, a principal característica dos modelos de variância condicional heteroscedástica é permitir a volatilidade variar ao longo do tempo e, assim, explicar alguns fatos estilizados em variáveis de alta frequência.

O primeiro passo à estimação desses modelos consistiu em apurar as especificações da família ARCH que, levando em conta todo o período amostral dos retornos (22/09/1998 a 21/10/2002 – 1010 observações), bem como o método de estimar do geral para o específico, obedeceram aos seguintes critérios:<sup>32</sup>

<sup>32</sup> O *software* econométrico *Ox*, pacote [G@rch](http://www.egss.ulg.ac.be/garch) 2.3, foi o programa utilizado em todas as estimações e previsões dos modelos ARCH e suas extensões. Esse pacote está disponível para *download* no seguinte endereço: <http://www.egss.ulg.ac.be/garch>. A escolha deste programa deveu-se ao amplo conjunto de opções disponíveis:

- a existência de convergência no modelo proposto;
- o modelo capturava a dinâmica do primeiro e segundo momentos dos retornos da Telemar S.A. através da análise da estatística  $Q$  de *Box-Pierce*,<sup>33</sup>
- os coeficientes estimados eram estatisticamente significantes;
- o teste ARCH-LM rejeitava a hipótese de efeitos ARCH na variância.

Avaliados os modelos sob esses condicionantes, foram selecionadas algumas formulações que minimizavam o critério de informação de *Akaike* e/ou o de *Schwarz*.<sup>34</sup> A tabela 3 apresenta as especificações resultantes.

**Tabela 3 – Modelos GARCH estimados.**

Eq.média	Eq.variância	Distrib.	Log likel	Akaike	Schwarz	Q(5) resid	Q(5) Res quadr.
Arma(2,2)	Garch(3,3)c	gauss	-2518,710	5,009327	5,062886	2,06311	3,52675
Arma(2,2)	Garch(3,2)c	gauss	-2514,882	4,999766	5,048456	1,47224	0,765187
Arma(2,2)	Garch(2,2)c	gauss	-2526,388	5,014630	5,058451	1,32617	3,06057
Arma(2,2)	Garch(1,1)c	gauss	-2524,760	5,013387	5,047470	1,53119	3,82252
Arma(1,1)	Garch(1,1)c	t-stud	-2516,142	4,994341	5,023555	1,71126	11,2166*
Arma(1,1)	Garch(1,1)	t-stud	-2523,970	5,007862	5,032207	0,666408	6,7128
Arma(2,2)	Garch(3,3)c	t-stud	-2506,398	4,986928	5,045356	1,08874	6,64091
Arma(1,1)	Egarch(1,0)c	gauss	-2552,151	5,065646	5,094860	5,51818	32,3776*
Arma(0,0)	Egarch(1,1)	gauss	-3254,682	6,452836	6,472312	4,51471	2,45281
Arma(0,0)	Egarch(1,0)c	Gauss	-2659,802	5,274855	5,294331	39,9078*	59,7046*
Arma(1,1)	Egarch(1,0)c	t-stud	-2516,728	4,999461	5,038413	2,06759	2,23561
		assim					
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	t-stud	-2508,664	4,981513	5,015596	2,04388	6,09631
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	GED	-2508,951	4,982082	5,016165	2,30677	6,01113
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	t-stud	-2508,659	4,983484	5,022436	2,03686	6,11032
		assim					
Arma(1,1)	GJR(1,1)	t-stud	-2512,56	4,987253	5,016468	1,39784	3,61121
Arma(1,1)	GJR(1,1)	Gauss	-2522,511	5,004972	5,029317	1,64197	3,83052
Arma(1,1)	Figarch(1,d,0)c	t-stud	-2518,928	4,999856	5,029071	1,39549	12,1906*
Arma(1,1)	Figarch(1,d,1)c	t-stud	-2516,306	4,996646	5,030729	1,17925	7,58949
Arma(2,2)c	Figarch(2,d,2)c	t-stud	-2510,356	4,994765	5,053193	1,46558	8,95642
Arma(2,2)	Figarch(2,d,2)c	t-stud	-2510,36	4,992792	5,046351	1,4768	8,99013
Arma(1,1)	Figarch(1,d,1)	t-stud	-2518,102	4,998222	5,027436	1,07086	6,88917

\* estatisticamente não significativa a 5%. O método de estimação dos modelos foi do geral para o específico. Os dados compreendem os retornos da Telemar S.A. no período de 22/09/1998 a 21/10/2002. A letra “c” após a especificação da equação da média ou variância, denota a constante. As distribuições são a *gaussiana*, *t-Student*, *GED* e *t-Student* assimétrica. Q(5) é a estatística-Q no lag 5, isto é, não existe nenhuma autocorrelação nos resíduos (ou nos resíduos ao quadrado) na ordem 5.

várias especificações à equação da média, modelos ARCH, GARCH, EGARCH, GJR, FIGARCH, quatro funções de distribuição, estimação por ML e Quase-ML, previsões da variância e vários testes.

<sup>33</sup> Veja *Greene* (2000), p. 762, para maiores detalhes sobre a estatística  $Q$ .

<sup>34</sup> O critério de informação de Akaike é dado por:  $AIC = \log \frac{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}}{n} + \frac{2(k+1)}{n}$ , onde  $k$  é número de parâmetros,  $n$

o número de observações e  $\hat{\varepsilon}$  é o resíduo estimado. O critério de informação de Schwarz é:

$$SIC = \log \frac{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}}{n} + \frac{(k+1) \log n}{n}.$$



Note que o modelo GARCH (1,1) com constante na equação da variância, distribuição *t-Student*, não rejeitou a hipótese de autocorrelação nos resíduos ao quadrado, ou seja, esta especificação não captura o processo gerador dos retornos. Geralmente, esta é a formulação utilizada na literatura para avaliar o poder preditivo ou informacional das volatilidades.

A partir das estimações acima, onde não se consegue identificar claramente pelo AIC ou SIC qual é o melhor modelo, essas formulações foram reestimadas para verificar qual o modelo que consegue prever com maior acuracidade a variância. Para tanto, foram realizadas previsões *out-of-sample* com um intervalo de 63 dias de negociação (aproximadamente três meses), para através do erro quadrático médio (RMSE), erro absoluto médio (MAE) e erro percentual absoluto médio (MAPE), concluir qual é a melhor especificação.<sup>35</sup> A tabela 4 apresenta os erros estatísticos dessas previsões à variância. O modelo FIGARCH é, a princípio, o modelo que melhor especifica a variância condicional a partir desses critérios.

**Tabela 4 – Erros estatísticos da previsão da variância.**

Eq.média	Eq.variância	distrib	RMSE	MAE	MAPE
arma(2,2)	garch(3,3)c	gauss	9.9611	8.0487	272.6442
Arma(2,2)	garch(3,2)c	gauss	Não	converge	
Arma(2,2)	Garch(2,2)c	gauss	9.9817	8.0033	283.0424
Arma(2,2)	Garch(1,1)c	gauss	9.9768	7.9606	277.7574
Arma(1,1)	Garch(1,1)c	t-stud	10.0149	8.0539	282.9783
Arma(1,1)	Garch(1,1)	t-stud	10.3635	8.7236	315.1715
<b>Arma(2,2)</b>	<b>Garch(3,3)c</b>	<b>t-stud</b>	<b>9.8613</b>	<b>7.8147</b>	<b>257.5852</b>
Arma(1,1)	Egarch(1,0)c	gauss	Não	converge	
Arma(0,0)	Egarch(1,1)	gauss	11.6170	10.5762	418.4060
Arma(0,0)	Egarch(1,0)c	Gauss	10.7621	9.3928	365.9576
<b>Arma(1,1)</b>	<b>Egarch(1,0)c</b>	<b>t-stud a</b>	<b>10.3968</b>	<b>8.7587</b>	<b>343.2158</b>
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	t-stud	10.6827	9.2760	358.2064
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	GED	10.5590	9.0693	349.4971
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	t-stud a	10.5908	9.1188	352.4868
Arma(1,1)	GJR(1,1)	t-stud	12.6992	11.7793	456.8022
Arma(1,1)	GJR(1,1)	Gauss	11.7339	10.7262	412.9636
Arma(1,1)	Figarch(1,d,0)c	t-stud	9.8158	7.2860	242.8221
Arma(1,1)	Figarch(1,d,1)c	t-stud	9.8429	7.6174	260.7597
Arma(2,2)c	Figarch(2,d,2)c	t-stud	9.7589	7.2619	248.8837
Arma(2,2)	Figarch(2,d,2)c	t-stud	9.7582	7.2643	249.3755
<b>Arma(1,1)</b>	<b>Figarch(1,d,1)</b>	<b>t-stud</b>	<b>9.9091</b>	<b>6.7603</b>	<b>190.1993</b>

Assim, a partir do menor RMSE, MAE e MAPE, foram selecionados 3 modelos: o primeiro foi o ARMA (2,2)/GARCH (3,3)c, distribuição *t-Student*, que pode explicar a aglomeração da volatilidade e sua persistência. A segunda especificação foi o ARMA (1,1)/EGARCH (1,0)c,

<sup>35</sup> Suponha que o período de previsão é  $t = S, S+1, \dots, S+h$ , e seja  $y_t$  e  $\hat{y}_t$  o valor real e o valor previsto no

$$\text{período } t. \text{ Então, } RMSE = \sqrt{\frac{1}{h+1} \sum_{t=S}^{S+h} (\hat{y}_t - y_t)^2}, MAE = \frac{1}{h+1} \sum_{t=S}^{S+h} |\hat{y}_t - y_t|, MAPE = \frac{1}{h+1} \sum_{t=S}^{S+h} \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right|.$$

distribuição *t-Student* assimétrica, a qual possibilita captar o efeito de alavancagem. A última foi o ARMA (1,1)/FIGARCH (1,d,1), distribuição *t-Student*, que, através do coeficiente de integração fracionária, modela a dependência de longo prazo. As estimativas desses processos são apresentadas na tabela 5.

**Tabela 5 – Estimativas dos parâmetros das variâncias condicionais**

	ARMA (2,2)/ GARCH(3,3)c	ARMA(1,1)/ EGARCH(1,0)c	ARMA(1,1)/ FIGARCH(1,d,1)
AR(1)	0,554404 (4,175)	-0,211956 (-11,64)	-0,234233 (-5,225)
AR(2)	0,173830 (2,208)		
MA(1)	-0,363794 (-2,837)	0,430408 (12,73)	0,450231 (8,609)
MA(2)	-0,383885 (-4,703)		
Cte. Variância	0,663708 (2,379)	2,143841 (3,098)	
GARCH( <i>Beta</i> 1)	-0,635491 (-30,91)	0,980439 (87,79)	0,639859 (8,992)
GARCH( <i>Beta</i> 2)	0,432621 (15,07)		
GARCH( <i>Beta</i> 3)	0,888606 (51,32)		
ARCH( <i>Alpha</i> 1)	0,099371 (7,651)		0,286721 (3,609)
ARCH( <i>Alpha</i> 2)	0,101737 (4,107)		
ARCH( <i>Alpha</i> 3)	0,048817 (2,457)		
EGARCH ( <i>Theta</i> 1)		-0,095288 (-4,480)	
EGARCH( <i>Theta</i> 2)		0,189640 (5,713)	
d-Figarch			0,443542 (6,490)

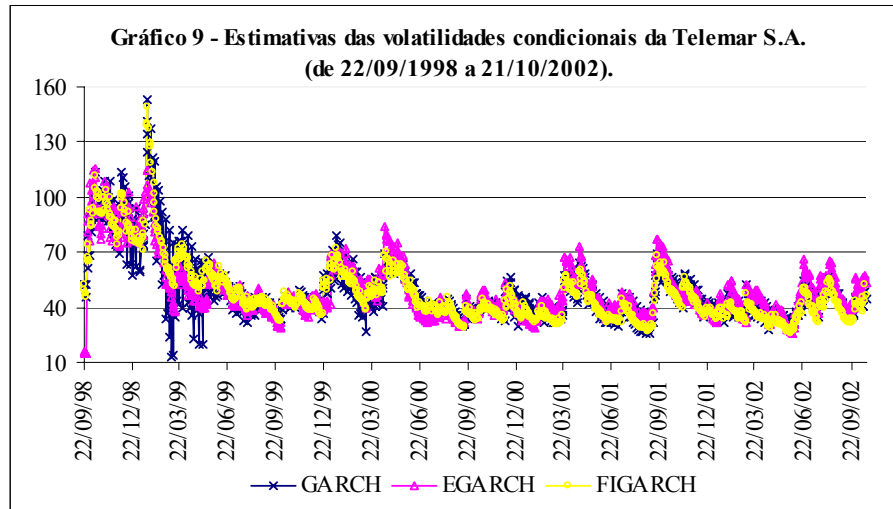
Estadística *t* entre parênteses.

Conforme pode ser visto na tabela acima, no GARCH  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 0,93566$ . Isto

conduz a uma meia-vida de 12 dias: o tempo necessário para que o efeito de um choque na volatilidade diminua até a metade. O coeficiente *theta* 1 negativo no modelo EGARCH significa que existe a presença do efeito alavancagem nos retornos da Telemar S.A. – a volatilidade responde assimetricamente a choques, e que esta magnitude é em torno de 19%, de acordo com o *theta* 2. Por fim, o coeficiente *d* do modelo FIGARCH - 0,443, traduz a dependência de longo prazo. O gráfico 9 apresenta as estimativas dessas volatilidades condicionais.

Note que os coeficientes estimados para a equação da média sobre os retornos da Telemar S.A. dizem que na média os retornos são autocorrelacionados: os coeficientes dos retornos

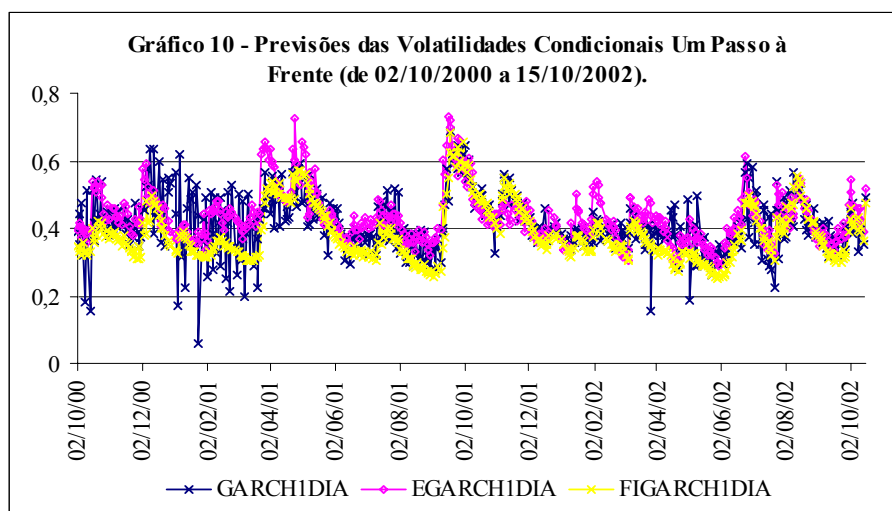
defasados um ou dois períodos são estatisticamente significantes a 5%. Logo, estes fatos sinalizam uma contradição com a teoria dos mercados eficientes, pois ganhos condicionais devem inexistir em um mercado “justo”, “racional”, ou seja, é impossível gerar ganho econômico e prever ganhos futuros em um mercado eficiente.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Executadas as estimações e selecionados os modelos, o próximo passo foi realizar as previsões da variância um passo à frente para o período de 02/10/2000 a 15/10/2002. Neste processo foi utilizada uma janela móvel de 502 observações históricas de retornos. Ou seja, o período de 22/09/1998 a 29/09/2000 foi usado para realizar a estimação nas formulações selecionadas e obter a previsão da volatilidade para 02/10/2000, de 23/09/1998 a 02/10/2000 para a previsão de 03/10/2000, e assim sucessivamente até completar o período todo. O objetivo de computar em cada janela os parâmetros e realizar a previsão é obter previsões mais realísticas possíveis, pois são exatamente esses dados que os participantes do mercado dispõem no tempo em que a volatilidade implícita é observada.

A tabela 6 retrata um sumário estatístico dessas previsões um passo à frente apresentadas no gráfico 10. Doravante serão referidas como: GARCH1DIA, EGARCH1DIA e FIGARCH1DIA. Note que a média dessas volatilidades é bem próxima à volatilidade realizada um passo à frente e às volatilidades incondicionais.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Por último, resta ainda realizar as previsões das volatilidades condicionais para serem equiparadas com a volatilidade futura, a qual é a volatilidade restante ao longo da maturidade da opção.

**Tabela 6 – Estatísticas descritivas das previsões das volatilidades condicionais 1 dia**

	GARCH1DIA	EGARCH1DIA	FIGARCH1DIA
Mean	0.413168	0.433492	0.384671
Median	0.402944	0.421699	0.365725
Maximum	0.690123	0.730043	0.684356
Minimum	0.058639	0.290091	0.248579
Std. Dev.	0.086147	0.076664	0.080460
Skewness	0.166679	1.112440	0.938384
Kurtosis	3.948566	4.555814	3.484032
Jarque-Bera	21.22900	154.7836	78.88741
Probability	0.000025	0.000000	0.000000
Observations	504	504	504

Nesse sentido, a previsão futura do modelo GARCH será dada por:

$$GARCHPREV_t = \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^{T-t} GARCH1DIA_{t+i}, \quad (19)^{36}$$

onde  $T-t$  é o prazo de vencimento da opção. Desse modo, a previsão da volatilidade condicional é a média aritmética das previsões um passo à frente dos dias restantes à maturidade da opção. As estatísticas descritivas dessas previsões são apresentadas na tabela 7. O gráfico 11 e o gráfico 12

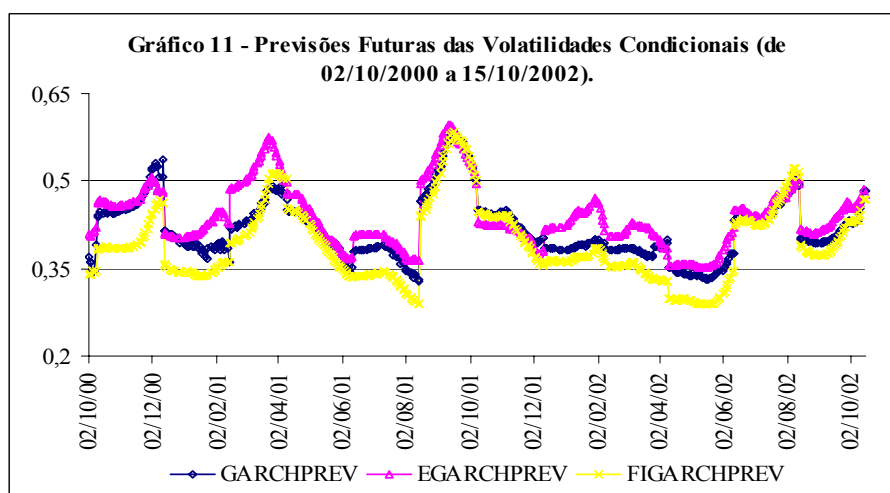
<sup>36</sup> Para as previsões dos modelos EGARCH e FIGARCH é necessário somente alterar o somatório em (19) com a respectiva volatilidade um passo à frente.

plotam, respectivamente, as previsões futuras das volatilidades condicionais e a volatilidade realizada com a FIGARCHPREV.

Constata-se que modelo FIGARCHPREV tem a menor esperança, seguida do GARCHPREV e por último do EGARCHPREV. Essa tendência fica clara no gráfico 11, pois a volatilidade do modelo FIGARCH se encontra praticamente sempre abaixo das outras. Contudo, o desvio padrão maior do FIGARCH indica que ele capta melhor os choques. Note que as séries apresentam uma clara quebra estrutural em 09/2001, quando os mercados acionários mundiais foram abalados pelos atentados terroristas nos E.U.A..

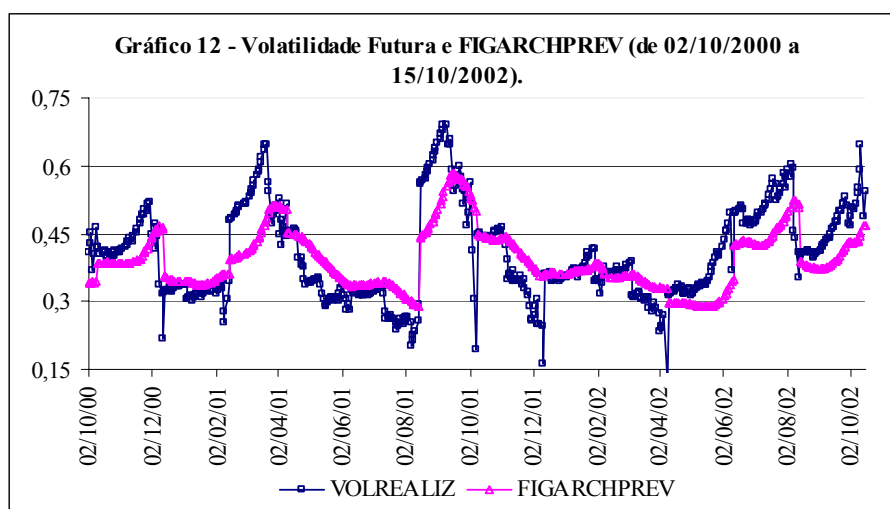
**Tabela 7 – Estatísticas descritivas das previsões das volatilidades incondicionais**

	EGARCHPREV	FIGARCHPREV	GARCHPREV
Mean	0.439617	0.392844	0.418217
Median	0.425971	0.381753	0.402542
Maximum	0.596276	0.583050	0.585197
Minimum	0.350866	0.287980	0.327956
Std. Dev.	0.053833	0.065577	0.053233
Skewness	0.743106	0.706240	0.828456
Kurtosis	3.280864	3.127869	3.518956
Jarque-Bera	48.04196	42.24043	63.30819
Probability	0.000000	0.000000	0.000000
Observations	504	504	504



Fonte: Elaborado pelos autores.

Vale destacar a forte correlação entre a volatilidade realizada e a FIGARCHPREV de 0,74 – uma indicação de que este predictor estatístico capta bem a volatilidade futura ao longo do tempo de vida do contrato de opção (isto também fica claro por uma simples observação no gráfico 12).



Fonte: Elaborado pelos autores.

Concluídas as séries de volatilidades em nível, foram realizados os testes especificados na seção 2 deste estudo, os quais serão tratados na subseção seguinte. Um importante aspecto é constatado através do correlograma de todas essas séries. Verifica-se que todas as séries têm, com exceção da  $\sigma_{t+1}$ , uma alta correlação serial. A fonte deste fato é a sobreposição substancial dos dados. Isto deve-se ao fato de a amostra de dados ser diária, enquanto os intervalos de previsão são determinados pelos ciclos de expiração dos contratos de opções.<sup>37</sup>

## 8 REGRESSÕES DE PREVISÃO

A partir das especificações dos testes de conteúdo de informação e poder de previsão listados na subseção 2, várias hipóteses podem ser levantadas:

- se o predictor estatístico ou implícito contém alguma informação sobre a volatilidade um passo à frente, o coeficiente  $\beta_1$  na equação (2) deve ser estatisticamente diferente de zero;
- se na equação (2)  $\beta_1 = 1$  e  $\alpha_0 = 0$ , este predictor é uma estimativa eficiente e não viesada da volatilidade no curtíssimo prazo;
- se o predictor é eficiente e não viesado, o intercepto  $\omega_0$  deve ser igual a zero e o coeficiente de inclinação  $\delta_1$  igual a 1 na equação (5). Isto implica que este predictor pode

<sup>37</sup> A alta correlação serial nas séries é o motivo que leva a utilizar o procedimento de *Newey & West* (1987) nas regressões do poder de previsão, conforme já destacado na subseção 2.

ser uma boa fonte de referência para prever a volatilidade ao longo do tempo de maturidade da opção. Por outro lado, se este previsor for a volatilidade implícita, significa que o mercado de opções é eficiente;

- d) pode-se atestar a eficiência relativa dos previsores através de regressões múltiplas incluindo as volatilidades estatísticas e implícitas.

Contudo, existe uma questão muito importante no contexto dos modelos de regressão padrão – a questão de raiz unitária nas séries de volatilidades. Uma das hipóteses do modelo de regressão clássico é que tanto a variável dependente como a(s) independente(s) sejam seqüências estacionárias e os erros tenham média zero e variância finita. Na presença de variáveis não estacionárias surge o problema de regressão espúria. Uma regressão espúria tem um alto  $R^2$ , estatística  $t$  significativa, mas os resultados não possuem qualquer consistência econômica.<sup>38</sup>

**Tabela 8 - Testes de raiz unitária**

Série de tempo	Teste estatístico ADF	Teste estatístico Phillips-Peron
MA (10)	-3,649332**	-4,537253*
MA (20)	-4,329134*	-3,064088**
<b>MA (30)</b>	<b>-2,798204</b>	<b>-2,649318</b>
EGARCH1DIA	-4,312871*	-5,818684*
EGARCHPREV	-3,241563**	<b>-2,618832</b>
FIGARCH1DIA	-4,262628*	-3,745266*
FIGARCHPREV	-2,911194**	<b>-2,410740</b>
GARCH1DIA	-4,409101*	-16,50133*
GARCHPREV	-3,096017**	<b>-2,723151</b>
VILIQUIDA	-5,203676*	-9,109490*
VINEAREST	-5,334797*	-8,954963*
VIPOND	-5,091255*	-6,892243*
VOL1DIA	-5,318257*	-20,22491*
VOLREALIZ	-2,887139**	-3,314636**

\* rejeita a hipótese de raiz unitária com 99% de confiança.

\*\* rejeita a hipótese de raiz unitária com 95% de confiança.

Para apurar o lag ótimo no teste ADF, foi seguido a metodologia proposta em Enders (1995), p. 256-258. No teste de Phillips-Peron foi utilizado o lag de truncagem igual a 5, sugerido em Newey & West (1994).

Dessa forma, é necessário testar a presença de raiz unitária nas séries de volatilidades em nível antes de executar as regressões. A tabela 8 apresenta os testes *augmented Dickey-Fuller* (ADF) e de *Phillips-Perron* (PP) a essas seqüências.

<sup>38</sup> Veja Enders (1995), para uma descrição detalhada do problema de regressão espúria e testes de raiz unitária.

O teste de PP aponta que as séries MA(30), EGARPREV, FIGARCHPREV e GARCHPREV são não estacionárias. Mas através dos gráficos 7 e 11, verifica-se que essa raiz unitária é devido à presença de quebras estruturais. Entretanto, dado que o teste ADF também indica a série MA(30) como não estacionária e, tendo em vista que não é usual na literatura a utilização da série MA(30), optou-se por desconsiderá-la nas regressões de previsão.

## 8.1 REGRESSÕES DO CONTEÚDO DE INFORMAÇÃO

Os resultados das regressões do conteúdo de informação utilizando as equações (2) e (3) são apresentados na tabela 9. Pode-se afirmar que a volatilidade implícita ponderada possui uma substancial quantidade de informações para prever a volatilidade um passo à frente, pois apresenta o maior  $R^2$  ajustado de todas as regressões. Além disso, pela estatística *Wald* o seu coeficiente é estatisticamente unitário e o intercepto é zero em um teste individual; contudo, é rejeitada essa hipótese num teste conjunto.

Assim, a volatilidade implícita ponderada é um previsor eficiente, mas viesado. A mesma conclusão é verificada para a volatilidade implícita mais líquida. Esta porém, tem um coeficiente de determinação ajustado inferior.

Particularmente interessantes são os resultados dos modelos EGARCH e FIGARCH. Ambos são previsores eficientes e não viesados da volatilidade de curtíssimo prazo pela estatística *Wald* -  $\chi^2 = 2,698$  e  $\chi^2 = 4,398$ , respectivamente. Contudo, eles contêm uma quantidade de informações inferior à volatilidade implícita ponderada, de acordo com o  $R^2$  ajustado.

Quanto à eficiência relativa, o MA(20) é relativamente mais eficiente quando a volatilidade implícita é a *nearest-at-the-money*. Nas outras regressões não se pode chegar a uma conclusão precisa; é possível apenas afirmar que a inclusão dessa volatilidade estatística com a VOLPOND ou VILÍQUIDA significou um aumento no  $R^2$  ajustado em torno de 20%. Ou seja, parece que o modelo estatístico MA(20) associado à volatilidade implícita ponderada ou mais líquida é capaz de conter maiores informações sobre a volatilidade um passo à frente. Contudo, uma associação entre os previsores implícitos eleva substancialmente o  $R^2$  ajustado, isto é, parece que as três séries de volatilidades implícitas juntas possuem substancial conteúdo de informações sobre a volatilidade um passo à frente.

Em suma, a afirmação de que as opções indicam melhores informações aos participantes do mercado sobre as expectativas de risco ao longo do próximo dia do que os modelos estatísticos é de certo modo refutada pelos dados das opções e ações da Telemar S.A., pois os modelos EGARCH e FIGARCH – com parâmetros baseados em valores *ex-post* –, são não viesados e



eficientes, apesar de conterem uma pequena quantidade de informações, menor do que a VOLPOND e a VILQUIDA.

**Tabela 9 - Resultados das regressões do conteúdo de informação**

Constante	Coeficientes							R <sup>2</sup> ajustado	
	VI Pond	VI Nearest	VI mais líquida	MA(10)	MA(20)	GARCH	EGARCH		FIGARCH
-0,157601 (0,09228)	1,072388* (0,172266)								0,0698
-0,056546 (0,08918)			0,884046* (0,166766)						0,0511
0,131042 (0,075818)		0,469194* (0,125142)							0,0253
-0,042185 (0,083413)							1,042846* (0,189487)		0,0550
0,109789 (0,071768)								0,780125* (0,182624)	0,0331
0,233221* (0,044874)			0,452409* (0,108584)						0,0315
0,195368* (0,072627)						0,519190* (0,172088)			0,0159
0,295710* (0,056364)				0,286668* (0,006735)					0,0067
-0,234769* (0,118229)	0,749886* (0,200138)		0,108057 (0,271211)	-0,66722* (0,299930)	-0,081715 (0,230642)	0,373660 (0,348448)	0,892061 (0,670754)		0,0846
-0,183093 (0,117726)			0,546637* (0,189007)	0,082788 (0,272534)	-0,70543* (0,301247)	-0,099799 (0,232329)	0,473576 (1,354847)	1,011595 (0,672714)	0,0743
-0,090011 (0,112734)		0,204314 (0,137946)	0,083215 (0,275900)	-0,75128* (0,302927)	-0,075773 (0,233650)	0,616137 (0,353438)	1,064297 (0,677131)		0,0629
-0,242235* (0,093290)	3,277368* (0,630577)	-1,109634* (0,278567)	-0,801242 (0,534340)						0,1011
-0,038578 (0,107381)			0,030717 (0,273942)	-0,79462* (0,301872)	-0,055721 (0,233536)	0,784592* (0,335039)	1,133027 (0,676348)		0,0606

\*coeficiente estatisticamente significativo a 5%. Erros padrões por OLS entre parênteses (a variável dependente não é sobreposta). As estimações consistem de 504 observações no período de 02/10/2000 a 15/10/2002, realizadas no software econométrico *Eviews*.

Esse resultado é relevante na gestão de risco por “*Value-at-Risk*”, pois as instituições financeiras utilizam geralmente o horizonte de um dia para a gestão de risco de *portfólios*, de recursos de terceiros. Como, neste caso, a variável relevante é a volatilidade dos ativos da carteira para o dia seguinte, o uso de previsores baseados em dados históricos pode resultar em ganhos expressivos em relação ao uso de volatilidades implícitas, onde a principal limitação é a pouca liquidez com opções no mercado brasileiro.

## 8.2 REGRESSÕES DO PODER DE PREVISÃO

Nas regressões do conteúdo de informação foi testada a habilidade da variável independente em explicar os retornos absolutos do dia seguinte. Agora, testar-se-á o poder de

previsão da variável explicativa ao longo do tempo de maturidade da opção. Isso implica em considerar a existência de uma estrutura a termo da volatilidade, ou seja, que ela não é necessariamente constante ao longo de todos os dias dos contratos de opções.

O poder de previsão é testado utilizando a equação (5). Os resultados são apresentados na tabela 10. Vale lembrar que nestas regressões as previsões dos modelos GARCH são dados pela equação (19).

Em primeiro lugar, convém fazer uma comparação do  $R^2$  ajustado nos dois conjuntos de regressões. Nos modelos de volatilidade implícita e de volatilidade não condicional ele é praticamente nulo ou negativo nas regressões de poder preditivo. Mas observe a substancial diferença para os modelos de volatilidade condicional, que são muito superiores aos das regressões do conteúdo de informação. Utilizando o EGARCHPREV, por exemplo, pode-se afirmar que 60% da volatilidade futura é explicada por choques *ex-post* capturados por esse modelo estatístico.

**Tabela 10 - Resultados das regressões do poder de previsão**

Cons- tante	Coeficientes							R <sup>2</sup> ajus- tado	
	VI Pond	VI Nearest	VI mais líquida	MA(10)	MA(20)	GARCH PREV	EGARCH PREV		FIGARCH PREV
0,361245* (0,059446)	0,080609 (0,109467)								0,0021
0,368047* (0,056230)			0,067957 (0103416)						0,0012
0,416610* (0,047406)		-0,021385 (0,077242)							-0,0014
0,382555* (0,034700)				0,054664 (0,077497)					0,00301
0,417573* (0,042980)					-0,034328 (0,096107)				-0,0007
-0,178482* (0,058697)						1,392537* (0,143853)			0,4998
-0,261579* (0,049520)							1,513773* (0,111995)		0,6045
-0,063745 (0,042853)								1,190411* (0,111981)	0,5545
0,026352 (0,052508)	-0,25979* (0,070734)			-0,141659* (0,045867)	-0,19981* (0,066815)	-0,542506 (0,283365)	0,528497* (0,208552)	1,640514* (0,248646)	0,7598
0,019229 (0,053856)			-0,216490* (0,059294)	-0,148991* (0,046187)	-0,20556* (0,067734)	-0,530514 (0,288903)	0,487996* (0,211768)	1,645131* (0,249692)	0,7527
-0,002476 (0,052571)		-0,170194* (0,042916)		-0,155227* (0,044212)	-0,1879* (0,063480)	-0,525249 (0,293993)	0,597513* (0,216466)	1,527231* (0,247619)	0,7571
0,331043* (0,059619)	0,559124 (0,297404)	-0,388694* (0,151379)	0,015127 (0,173359)						0,0342
-0,017487 (0,056983)				-0,187256* (0,052248)	-0,21665* (0,074156)	-0,63726* (0,301959)	0,315250 (0,23891)	1,804072* (0,251630)	0,7268

\*coeficiente estatisticamente significativo a 5%. Erros padrões (entre parênteses) corrigidos pela induzida sobreposição e heterocedasticidade da variável dependente usando o procedimento de *Newey-West* (1987). As estimações consistem de 504 observações no período de 02/10/2000 a 15/10/2002, realizadas no *software Eviews*.

A hipótese de um previsor eficiente e não viesado implica que a constante seja zero e o coeficiente da volatilidade unitário. Pode-se ver que somente os coeficientes dos modelos de volatilidade condicionais são estatisticamente significantes. Logo, a princípio, a hipótese de que o mercado de opções é eficiente deve ser rejeitada.

A estatística *Wald* não rejeita a hipótese de eficiência e não viés para o modelo FIGARCHPREV a um nível de significância de 1%:  $\chi_2^2 = 4,464214$  e  $F(2,504) = 2,232107$ .

Na questão da avaliação da eficiência relativa dos previsores através das regressões múltiplas, os coeficientes dos previsores estatísticos ou implícitos devem ser zeros. Nota-se que a associação desses previsores eleva os ganhos em termos do  $R^2$  ajustado, além do que todos os coeficientes são estatisticamente diferentes de zero, à exceção do modelo GARCH.

Enfim, para fins de avaliação e precificação de opções, *hedding* e, conseqüentemente seu controle de risco, são necessárias previsões para toda a maturidade futura da opção, isto é, previsores que espelham com a maior precisão possível o futuro. Nesse sentido, a partir dos testes do poder de previsão, pode-se afirmar, a um nível de confiança de 99%, que o modelo estatístico FIGARCHPREV é um previsor eficiente e não viesado da volatilidade futura.

## 9. CONCLUSÕES

Uma das principais características das opções é sua natureza *forward looking*. Sendo assim, e se os mercados de opções são eficientes, a volatilidade implícita derivada do preço de uma opção deve prever a volatilidade futura com maior precisão do que a volatilidade baseada em parâmetros *ex-post*.

Inúmeras pesquisas têm procurado determinar qual o melhor estimador da volatilidade. Dessa forma, testou-se, a partir das regressões de previsão, qual o previsor que contém maiores informações sobre a volatilidade do dia seguinte e sobre a volatilidade futura.

Os resultados das regressões do conteúdo de informação revelam que a volatilidade implícita ponderada contém informação relevante sobre a volatilidade um passo à frente, entendida como a variação absoluta dos retornos entre  $t$  e  $t + 1$ . Contudo, ela é viesada. Por outro lado, os modelos estatísticos EGARCH e FIGARCH, apesar do  $R^2$  ajustado ser um pouco inferior ao obtido na regressão com a VIPOND, são eficientes e não viesados. Esse resultado é muito importante para avaliações de risco com um horizonte de curtíssimo prazo, pois essas avaliações podem ser efetuadas a partir de modelos que dependem de dados históricos dos ativos.

Os resultados das regressões do poder de previsão refutam a hipótese da volatilidade implícita, apurada através da fórmula de *Black-Scholes*, ser o melhor previsor da volatilidade

futura, pois seus coeficientes não são estatisticamente significantes. Entretanto, os modelos de volatilidade condicional têm um poder de determinar a volatilidade realizada ao longo do tempo de maturidade da opção muito alto, em torno de 55%. Aliado a isto, o modelo FIGARCH é eficiente e não viesado.

Na avaliação da eficiência relativa dos previsores, os resultados dos conjuntos de regressão mostram que uma associação entre as volatilidades implícita e estatística permite uma melhora significativa na determinação da volatilidade realizada.

Se a volatilidade implícita é uma medida *ex-ante*, na qual todos os *traders* têm (a princípio) todo o conjunto relevante de informações sobre o futuro, ela deveria prever com maior habilidade a volatilidade futura do que um modelo que toma os dados *ex-post*. Então, as conclusões acima podem implicitamente denotar a ineficiência no mercado de opções brasileiro, avaliado a partir de uma base de dados de opções e ações da Tele Norte Leste Participações S.A., negociadas na Bovespa.

Porém, isso também pode ser uma refutação ao modelo *Black-Scholes* – variância constante e conhecida - como o modelo que precifica a opção, ou ainda, que outros parâmetros, principalmente o prêmio de risco requerido pelos investidores, podem ser altamente significativos no mercado brasileiro.

Uma continuação deste estudo seria aplicar a metodologia acima para um conjunto das ações e opções mais negociadas no mercado brasileiro, bem como estendê-la para o mercado de câmbio. Outra seqüência seria modelar a variância condicional a partir de um modelo estatístico que supõe quebras estruturais, do tipo *Markov-Switching*. Além disso, poder-se-ia computar a volatilidade realizada conforme sugerido por *Andersen & Bollerslev* (1998) – avaliar a previsão das volatilidades a partir de dados de retornos intradia dos ativos. Também, controlar o prazo até o vencimento, isto é, a partir de uma quantidade de dados maior - no mínimo com sessenta ciclos de vencimentos de opções, fixar o intervalo de tempo  $N = (T - t)$  e repetir a análise para ver se os resultados se mantêm.

## REFERÊNCIAS

- AGUILAR, Javiera. GARCH, Implied Volatilities and Implied Distributions: Na Evaluation for Forecasting Purposes. **Central Bank of Sweden**, Working Paper Series, n. 08, p. 1-10, ago. 1999.
- ALEXANDER, Carol. **Market Models: a guide to financial data analysis**. New York: John Wiley & sons, Inc., 2001.
- AMIM, Kaushik; NG, Victor K. Inferring Future Volatility from the Information in Implied Volatility in Eurodollar Options: A New Approach. **The Review of Financial Studies**, v. 10, n. 2, p. 333-367, 1997.
- ANDERSEN, Torben G.; BOLLERSLEV, Tim. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts. **International Economic Review**, v. 39, n. 4, p. 885-905, 1998.
- ANDRADE, Sandro C.; TABAK, Benjamin M. Is it Worth Tracking Dollar/Real Implied Volatility? **Banco Central do Brasil**, Working Papers Series, n. 15, p. 1-25, mar. 2001.
- BAILLIE, R. T.; BOLLERSLEV, T.; MIKKELSEN, H. O. Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 74, p. 3-30, 1996.
- BATES, David S. Post-'87 Crash Fears in the S&P 500 Futures Option Market. **Journal of Econometrics**, v. 94, p. 181-238, 2000.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, p. 637-654, 1973.
- BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, p. 307-328, 1986.
- BOLLERSLEV, T.; CHOU, R.Y.; KRONER K.F. ARCH Modelling in Finance: A Review of The Theory and Empirical Evidence. *Journal of Econometrics*, v. 52, p. 5-59, 1992.
- BOLLERSLEV, T.; MIKKELSEN, H. O. Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility. **Journal of Econometrics**, v. 73, p. 151-184, 1996.
- BUSTAMANTE, M.; FERNANDES, M. Um Procedimento para Análise da Persistência na Volatilidade. *Revista de Econometria*, v. 17, nr.01, p. 15-43, 1997.
- CANINA, L.; FIGLEWSKI, S. The Informational Content of Implied Volatility. **Review of Financial Studies**, v. 6, p. 659-681, 1993.
- CORREA, M.M.R.L.; PEREIRA, P.L.V. Modelos não-lineares em Finanças: Previsibilidade em Mercados Financeiros e Aplicações a Gestão de Risco. *Anais do XX Encontro Brasileiro de Econometria*, v.1, p. 427-448, 1998.
- CHRISTENSEN, B. J.; PRABHALA, N. R. The Relation Between Implied and Realized Volatility. **Journal of Financial Economics**, v. 50, p. 125-150, 1998.
- DAY, Theodore E.; LEWIS, Craig M. Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options. **Journal of Econometrics**, v. 52, p. 267-287, 1992.
- DING, Z.; GRANGER, C. W. J.; ENGLE, R. F. A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. **Journal of Empirical Finance**, v. 1, p. 83-106, 1993.
- DUMAS, Bernard; FLEMING, Jeff; WHALEY, Robert E. Implied Volatility Functions: Empirical Tests. **The Journal of Finance**, v. LIII, n. 06, p. 2059-2106, 1998.

- ENDERS, Walter. **Applied Econometric Time Series**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation. *Econometric*, v.50, p. 987-1007, 1982.
- ENGLE, R.; BOLLERSLEV, T. Modeling the Persistence of Conditional Variances. **Econometric Reviews**, v. 5, p. 1-50, 1986.
- ENGLE, R. F.; LILIEN, D. M.; ROBINS, R. P. Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure. *Econometrica*, 55/2, p. 391-407, 1987.
- ENGLE, Robert F.; MUSTAFA, Chowdhury. Implied ARCH Models from Options Prices. **Journal of Econometrics**, 52, p. 289-311, 1992.
- FAIR, Ray C.; SHILLER, Robert J. Comparing Information in Forecasts from Econometric Models. **The American Economic Review**, v. 80, n. 3, p. 375-389, 1990.
- FLEMING, Jeff. The Quality of Market Volatility Forecasts Implied by S&P 100 Index Option Prices. **Journal of Empirical Finance**, 5, p. 317-345, 1998.
- GALVÃO, A. B. C.; PORTUGAL, M. S.; RIBEIRO, E. P. Volatilidade e Causalidade: Evidências para o Mercado à Vista e Futuro de Índice de Ações no Brasil. **Revista Brasileira de Economia**, 54(1), p. 37-56, 2000.
- GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On The Relation Between Expected Value and The Volatility of The Nominal Excess Return on Stocks. **Journal of Finance**, v. 48, p. 1779-1801, 1993.
- GOMES, Frederico P. Volatilidade Implícita e Antecipação de Eventos de *Stress*: Um Teste para o Mercado Brasileiro. **Banco Central do Brasil**, Working Papers Series, n. 38, p. 1-38, mar. 2002.
- GREENE, William H. **Econometric Analysis**. 4. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc., 2000.
- HERENCIA, M. E. Z.; HOTTA, L. K.; PEREIRA, P. L. Filtragem e Previsão com Modelos de Volatilidade: Volatilidade Estocástica Versus GARCH. **Revista de Economia**, v. 52, n. 2, p. 241-278, 1998.
- HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc., 1997.
- HULL, J.; WHITE, A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility. **Journal of Finance**, v. 42, p. 281-300, 1987.
- ISSLER, J.V. Estimating and Forecasting the Volatility of Brazilian Finance Series Using ARCH Models. *Revista de Econometria*, v.19, n.1, p. 5-56, 1999.
- JORION, Philippe. Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market. **The Journal of Finance**, v. 50, n. 2, p. 507-528, 1995.
- JORION, Philippe. **Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk**. California: The McGraw-Hill Companies, Inc., 1997.
- LAMOUREUX, C. G.; LASTRAPES, W. Forecasting Stock Return Variance: Towards Understanding Stochastic Implied Volatility. **Review of Financial Studies**, v. 6, p. 293-326, 1993.
- MERTON, R. C. Theory of Rational Option Pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, n. 4 (Spring), p. 141-183, 1973.

- MORAIS, I. A. C.; PORTUGAL, M. S. Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do Ibovespa. *Estudos Econômicos*, v. 29, n. 3, p. 303-341, 1999.
- MORAIS, I. A. C.; PORTUGAL, M. S. Uma Investigação sobre os Co-Movimentos na Volatilidade dos Par *Bonds* Latino-Americanos. *Revista Brasileira de Economia*, v. 55, n. 2, p. 183-204, 2001.
- MOTTA, Daniel A.. The Predictive Power of Implied Volatility Applied to Brazil. **Anais do Primeiro Encontro Brasileiro de Finanças**, 2001.
- NAVATTE, Patrick; VILLA, Christophe. The Information Content of Implied Volatility, Skewness and Kurtosis: Empirical Evidence from Long-Term CAC 40 Options. **European Financial Management**, v. 6, n. 1, p. 41-56, 2000.
- NELSON, D. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach. **Econometrica**, v. 59, p. 347-370, 1991.
- NEWBY, Whitney; WEST, Kenneth. A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. **Econometrica**, v. 55, p. 703-708, 1987.
- NEWBY, Whitney; WEST, Kenneth. Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation. **Review of Economic Studies**, v. 61, p. 631-653, 1994.
- SHIRYAEV, Albert N. **Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory**. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999.
- SPANOS, Aris. **Probability Theory and Statistical Inference: econometric modelling with observational data**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- TAYLOR, Stephen J.; XU, Xinzong. Conditional Volatility and the Informational Efficiency of the PHLX Currency Options Market. **Journal of Banking & Finance**, v. 19, p. 803-821, 1995.
- TAYLOR, Stephen J.; XU, Xinzong. The Incremental Volatility Information in One Million Foreign Exchange Quotations. **Journal of Empirical Finance**, v. 4, p. 317-340, 1997.
- WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. **The Mathematics of Financial Derivatives – A Student Introduction**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- ZIEGELMANN, F. A.; PEREIRA, P. V. Modelos de Volatilidade Estocástica com Deformação Temporal: Um Estudo Empírico para o Índice Bovespa. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 27, n.2, p. 353-376, 1997.