

Modelos para títulos de desconto e considerações sobre calibragem

Fabricao Tourrucôo

April 25, 2007

Abstract

Utilizando métodos de perturbação regulares são obtidas fórmulas aproximadas para o preço de um título de desconto. Investigam-se algumas estratégias de calibragem. São feitas simulações numéricas para obter evidências da validade da aproximação assintótica.

Palavras-chave: Matemática de Finanças, Métodos de Perturbação, Apreçamento, Calibragem.

1 Introdução

Utilizando métodos de perturbação regulares¹, são obtidas fórmulas aproximadas para o preço de um título de desconto. Este instrumento é caracterizado por não ter pagamentos periódico de cupons e por ser vendido com um desconto relativamente ao seu valor de face. O comprador recebe uma obrigação que será resgatada pelo valor de face na data de vencimento do título. A importância de uma fórmula (exata ou aproximada) para um instrumento de desconto simplifica o apreçamento de instrumentos mais complexos que envolvam descontos de fluxos futuros.

Calibragem corresponde ao ajuste dos parâmetros do modelo a dados exógenos. O modelo deve ser livre de arbitragem frente, em especial, à estrutura a termo das taxas de juro. Consideram-se possibilidades de calibragem dos modelos obtidos.

A equação para o preço é discretizada obtendo-se uma aproximação numérica. Esta aproximação é comparada a aproximação analítica com o intuito de obter evidências da validade desta.

¹Cf. [1], [3], [5].

Salvo algumas seções adicionadas, este trabalho apresenta alguns dos resultados obtidos em [7]. No que segue: $t = 0$ corresponde à data presente; e denotamos um título de desconto por ZCB .

2 Modelagem

Seja V o valor de um instrumento de renda fixa com data de vencimento T . O modelo generalizado de Black-Karasinski (gBK) é definido por

$$V(t, x; T) = \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_t^T r(X(t')) dt'} V(T, X(T)) \mid X(t) = x \right\}, \quad (1a)$$

com $0 \leq t \leq T$, onde a variável de estado $X(t)$ segue o processo de Ornstein-Uhlenbeck

$$dX = [\theta(t) - \kappa(t)X] dt + \varepsilon \tilde{\alpha}(t) dW, \quad (1b)$$

$X(0) = 0$, $\varepsilon \ll 1$, com W um processo de Wiener, ou movimento Browniano e a taxa de juro de curto prazo r é uma função explícita g da variável de estado X

$$r = g(X) := r_0 (1 + \nu X)^{1/\nu}, \quad (1c)$$

onde $r_0 := r(0)$ é o valor atual da taxa de juro de curto prazo e $\nu = \frac{1}{q}$ com $q \in \mathbb{N}$. Os casos particulares $\nu = 1$ e $\nu = \frac{1}{2}$ são conhecidos como, respectivamente, os modelos de Hull-White (HW) e CIR. O caso limite de r ao $\nu \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$), $r = r_0 e^X$, é conhecido como o modelo de Black Karasinski (BK). Esse caso limite é utilizado para estender a definição em (1c) para incluir o caso $\nu = 0$. Embora este trabalho se focalize nesses casos particulares, a construção é válida para qualquer $\nu = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$.

Seja $\bar{X}(t)$ o valor esperado de $X(t)$

$$\bar{X}(t) := \mathbb{E} \{ X(t) \mid X(0) = 0 \}. \quad (2)$$

De (1b, 2) \bar{X} satisfaz o processo determinístico

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \kappa(t) \left(\frac{\theta(t)}{\kappa(t)} - \bar{X} \right), \quad (3a)$$

$$\bar{X}(0) = 0. \quad (3b)$$

De (3a) pode-se ver que \bar{X} reverte para a média $\frac{\theta(t)}{\kappa(t)}$ com velocidade $\kappa(t)$. Para referência futura, escreve-se a solução de (3) como

$$\bar{X}(t) = \lambda(t) \int_0^t \frac{\theta(s)}{\lambda(s)} ds, \quad (4a)$$

$$\lambda(t) := e^{-\int_0^t \kappa(s) ds}. \quad (4b)$$

Com o propósito de ilustrar a relação entre r e a variável de estado X , considere-se, em particular, o modelo para r (1b, 1c) com $\nu = 1$, ou seja, o modelo HW. Neste caso a taxa de juro de curto prazo r está relacionada linearmente à variável de estado X , ou seja, $r(t) = r_0(1 + X(t))$. A evolução de $r(t)$ é dada em torno de seu valor atual r_0 , sendo corrigido de acordo com a evolução de $X(t)$. Pode-se ver o fator de correção $X(t)$ como a soma de uma componente determinística, $\bar{X}(t)$, e de outra aleatória. Como a componente aleatória possui um parâmetro de escala $\varepsilon \ll 1$, o desvio em torno do valor esperado $\bar{X}(t)$ possui variância local pequena.

Para entender o efeito de mudar ν no modelo para a taxa de juro de curto prazo, examina-se a mudança local de $r \equiv r(X)$ em torno de $r_0 \equiv r|_{X=0}$. Dado que $r' = r_0^\nu r^{1-\nu}$ e $r'' = (1 - \nu)r_0^{2\nu} r^{1-2\nu}$, tem-se $r'|_{r=r_0} = r_0$ e $r''|_{r=r_0} = (1 - \nu)r_0$. Diminuindo ν , a partir de $\nu = 1$, assumindo-se $r_0 > 0$, adiciona convexidade ao modelo pois $r'|_{r=r_0}$ não depende de ν e $r''|_{r=r_0} > 0$. Note também que, para um $r_0 > 0$ dado, a convexidade aumenta à medida que se diminui ν .

A seguir, investigam-se as condições de monotonicidade, relativamente à variável de estado, e de não negatividade da taxa de juro de curto prazo pelo modelo (1c). Nesta discussão, assume-se $r_0 > 0$ e nota-se que a derivada de

$r \equiv r(X)$ de ordem n é dada por $r^{(n)} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - k\nu)r_0^{n\nu} r^{1-n\nu}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Se $\nu = 0$, isto é, para o modelo BK, r é uma função monótona crescente de X e $r > 0$. De outra forma, BK tem as propriedades de monotonicidade e de não negatividade da taxa de juro de curto prazo verificadas globalmente.

Para $\nu = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, entretanto, tais propriedades são verificadas somente em parte do domínio. Verifica-se que $r > 0$ e $r' > 0$ para $X > -\frac{1}{\nu}$. Se $X \leq -\frac{1}{\nu}$ diz-se que, por diferentes motivos, o modelo (1c) não possui significado físico. Existe a possibilidade de o modelo gerar uma taxa de juro zero, especificamente, $r(-\frac{1}{\nu}) = 0$. Se $\nu = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, $r^{(q)}(-\frac{1}{\nu}) > 0$ e $r^{(k)}(-\frac{1}{\nu}) = 0$, para $k < q$ e $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, para $X < -\frac{1}{\nu}$, r é decrescente se q é par e $r < 0$ se q é ímpar.

As limitações do modelo (1c) apontadas anteriormente são compensadas se variância local é pequena, advinda das condições $\varepsilon \ll 1$ e t ser limitado superiormente, e se $\bar{X}(t)$ possui valores, suficientemente, maiores que $-\frac{1}{\nu}$. Uma caracterização mais precisa das afirmações anteriores está fora do interesse principal deste trabalho.

Para simplificar o modelo (1) para um instrumento de renda fixa, define-se $Y(t)$ por

$$X(t) = \bar{X}(t) + \lambda(t)Y(t). \quad (5)$$

Em termos de Y , o modelo gBK é

$$V(t, y; T) = \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_t^T r(t', Y(t')) dt'} V(T, Y(T)) \mid Y(t) = y \right\}, \quad (6a)$$

e $r = r(t, Y)$ é dado por

$$r(t, Y) = g(\bar{X}(t) + \lambda(t)Y). \quad (6b)$$

Para mostrar que a variável aleatória Y , definida via (5), é um martingale basta diferenciar (5) para obter

$$\begin{aligned} dX &= d\bar{X} + Yd\lambda + \lambda dY \\ &= [\theta - \kappa(X - \lambda Y)] dt - \kappa\lambda Y dt + \lambda dY, \end{aligned}$$

onde foram usados (4, 5). Usando (1b) conclui-se que a variável de estado $Y(t)$ segue o processo

$$dY = \varepsilon\alpha(t)dW, \quad (6c)$$

$$Y(0) = 0, \quad (6d)$$

com

$$\alpha(t) := \frac{\tilde{\alpha}(t)}{\lambda(t)}. \quad (6e)$$

Dado que $\text{Var } Y(t) = \varepsilon^2 \int_0^t \alpha^2(s) ds$, entende-se α como um controle no modelo para a variância local da variável de estado Y .

Considera-se (6) para caso particular do apereçamento de um ZCB sob o modelo gBK. Seja $Z(t, y; T)$ o valor de um ZCB na data t , com vencimento na data T , dado que a variável de estado Y é y na data t . O problema de apereçamento é

$$Z(t, y; T) = \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_t^T r(t', Y(t')) dt'} \mid Y(t) = y \right\}, \quad (7)$$

juntamente com (6b-6e). Por Feynman Kac², $Z(t, y)$ verifica a equação de Kolmogorov

$$-Z_t + rZ = \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha^2 Z_{yy}, \quad \text{em } [0, T) \times \mathbb{R}, \quad (8a)$$

$$Z(T, y; T) = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (8b)$$

onde $r = r(t, y)$ é dada em (6b). O problema (8) será resolvido usando técnicas de perturbações regulares. Embora não seja relevante para a expansão

²Cf. [4].

assintótica, como será visto adiante, é necessário considerar o comportamento de Z em $|y| = \infty$. Essa consideração é necessária para a resolução numérica de (8) que, por sua vez, será utilizada para a validação da expansão assintótica.

Considere-se $t \in [0, T]$ fixo. Dado que $r \rightarrow +\infty$ ao $y \rightarrow +\infty$, para $\nu = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$ e $\nu = 0$, de (7) pode-se esperar

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ t \in [0, T], \\ t \text{ fixo}}} Z(t, y; T) = 0.$$

Mas, como

$$\lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ t \in [0, T], \\ t \text{ fixo}}} r(t, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } \nu = 0 \\ \infty, & \text{se } \frac{1}{\nu} \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } \frac{1}{\nu} \text{ é ímpar} \end{cases},$$

de (7) poderia esperar-se

$$\lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ t \in [0, T], \\ t \text{ fixo}}} Z(t, y; T) = \begin{cases} 1, & \text{se } \nu = 0 \\ 0, & \text{se } \frac{1}{\nu} \text{ é par} \\ \infty, & \text{se } \frac{1}{\nu} \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

3 Perturbações regulares

Resolve-se (8) assumindo-se Z da forma

$$Z(t, y; T) = e^{-\phi(t, y; T)}, \quad (9)$$

pois esta descreve melhor a natureza de desconto contínuo da variável Z . Resolver um problema de perturbação na variável ϕ será chamado, neste texto, de óptica geométrica, mas também é conhecido por WKB.

Em termos da nova variável dependente ϕ deve-se resolver a equação não-linear

$$\phi_t + r(t, y) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha^2 (\phi_y^2 - \phi_{yy}), \quad [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (10a)$$

$$\phi(T, y; T) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (10b)$$

Assume-se a expansão regular

$$\phi(t, y; T) = \phi^{(0)}(t, y; T) + \varepsilon^2 \phi^{(2)}(t, y; T) + \varepsilon^4 \phi^{(4)}(t, y; T) + \dots, \quad (11)$$

e calculam-se os três primeiros termos, ou seja até $O(\varepsilon^4)$.

O termo dominante $\phi^{(0)}$ satisfaz

$$\begin{aligned}\phi_t^{(0)} + r(t, y) &= 0, & \text{em } [0, T) \times \mathbb{R}, \\ \phi^{(0)}(T, y; T) &= 0, & \forall y \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

cujas soluções podem ser facilmente obtidas como

$$\phi^{(0)}(t, y; T) = R(t, y; T), \quad (12a)$$

$$R(t, y; T) := \int_t^T r(s, y) ds. \quad (12b)$$

Os termos $O(\varepsilon^2)$ fornecem a equação para a correção $\phi^{(2)}$

$$\begin{aligned}\phi_t^{(2)} &= \frac{1}{2}\alpha^2 \left[(\phi_y^{(0)})^2 - \phi_{yy}^{(0)} \right], & \text{in } [0, T) \times \mathbb{R}, \\ \phi^{(2)}(T, y; T) &= 0, & \forall y \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

cujas soluções são

$$\phi^{(2)}(t, y; T) = \frac{1}{2} \int_t^T \alpha^2(s) K^{(2)}(s, y; T) ds, \quad (12c)$$

com

$$K^{(2)}(s, y; T) := [R_{yy} - R_y^2](s, y; T). \quad (12d)$$

Os termos $O(\varepsilon^4)$ fornecem a equação para a segunda correção $\phi^{(4)}$

$$\begin{aligned}\phi_t^{(4)} &= \frac{1}{2}\alpha^2 [2\phi_y^{(0)}\phi_y^{(2)} - \phi_{yyy}^{(2)}], & \text{in } [0, T) \times \mathbb{R}, \\ \phi^{(4)}(T, y; T) &= 0, & \forall y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

cujas soluções são dadas por

$$\phi^{(4)}(t, y; T) = \frac{1}{4} \int_t^T \alpha^2(s) K^{(4)}(s, y; T) ds, \quad (12e)$$

onde

$$\begin{aligned}K^{(4)}(s, y; T) &:= \int_s^T \alpha^2(s') K_{yy}^{(2)}(s', y; T) ds' \\ &\quad - 2R_y(s, y; T) \int_s^T \alpha^2(s') K_y^{(2)}(s', y; T) ds',\end{aligned} \quad (12f)$$

e

$$K_{yy}^{(2)}(s', y; T) := [R_{yyyy} - 2R_{yyy}R_y - 2R_{yy}^2](s', y; T), \quad (12g)$$

$$K_y^{(2)}(s', y; T) := [R_{yyy} - 2R_{yy}R_y](s', y; T). \quad (12h)$$

4 Reproduzindo uma curva de desconto observada

Define-se um título de desconto como um título que oferece \$1, sem risco de inadimplência, na data T futura, negociado na data presente, $t = 0$, por $D(T)$. Um contínuo de títulos de descontos em T formam a chamada curva de desconto. Assume-se que a curva de desconto $D(T)$ é conhecida para todos os vencimentos T em $t = 0$. Esta situação corresponderia à curva $D(T)$ ser dada *a priori*, possivelmente interpolada, para todos os valores de T . Portanto se a condição

$$D(T) = Z(0, 0; T) \quad (13)$$

é satisfeita para todo T , implica que o modelo reproduz a curva de desconto observada em $t = 0$.

Considere-se, por um momento, o caso determinístico do modelo gBK, isto é, quando $X = \bar{X}$, ou $Y = 0$. Denotando por Z_d o valor de um ZCB dado pelo modelo determinístico, a condição $Z_d(t, T) = Z(t, 0; T)$, deve ser satisfeita para todo t e T . Se $Y = 0$ pode-se substituir, sem perda de generalidade, $\varepsilon = 0$. Isso implica que (10) tem a solução exata $\phi_d(t, T) = R(t, 0; T)$. Dado que $\phi_d(t, T) = R(0, 0; T) - R(0, 0; t)$, pode-se escrever Z_d como $Z_d(t, T) = \frac{Z(0, 0; T)}{Z(0, 0; t)}$. Usando (13), Z_d pode ser reescrita como

$$Z_d(t, T) = \frac{D(T)}{D(t)}. \quad (14)$$

Com (14) por motivação, reescreve-se (9, 11) como

$$Z(t, y; T) = \frac{D(T)}{D(t)} e^{-\Delta\phi(t, y; T)}, \quad (15a)$$

onde

$$\Delta\phi(t, y; T) := \phi(t, y; T) - (\phi(0, 0; T) - \phi(0, 0; t)), \quad (15b)$$

ou seja, a formulação (15) separa duas componentes principais: uma dada por um modelo deterministic model e outra na forma de uma correção $e^{-\Delta\phi}$ que diz respeito à natureza estocástica da taxa de juro.

Dado que (10b) é válida para qualquer $T > 0$, pela continuidade de ϕ , obtem-se $\phi(0, 0; 0) = 0$. Com $t = 0$ e $y = 0$ em (15a), e usando $D(0) = 1$ pode-se observar que a condição (13) é verificada. Portanto, ao reescrever a solução na forma (15), assegura-se que a estrutura a termo do ZCB para $t = 0$ reproduz a curva de desconto observada.

A aparente calibragem automática obtida com (15) deve ser discutida em mais detalhes. Considere-se, de momento, o caso determinístico. Como antes, seja Z_d o valor de um ZCB dado por esse modelo. Pode ser diretamente observado de (7) que

$$Z_d(t, T) = e^{-\int_t^T g(\bar{X}(s)) ds}. \quad (16)$$

Combinando (14, 16) obtém-se a seguinte relação entre \bar{X} e D no caso determinístico

$$g(\bar{X}(T)) = -\frac{D'(T)}{D(T)}. \quad (17)$$

Isso implica que os parâmetros κ e θ no modelo determinístico estão relacionados à curva de desconto observada, descartando, portanto, a aparente calibragem automática em (15) de Z relativamente a D .

A principal diferença entre as formulações (9) e (15a) reside no fato de elas fornecerem a curva de desconto de forma exata ou aproximada. A formulação (9) fornece a curva de desconto com origem no modelo, isto é, $Z(0, 0; T)$, enquanto que a formulação (15a) a substitui pela curva de desconto $D(T)$ observada.

5 Uma solução exata: HW

Para o modelo HW $r = r(t, y)$ é dada por

$$r(t, y) = r_0 (1 + \bar{X}(t) + \lambda(t)y).$$

Em particular, $r_y = r_0 \lambda(t)$ e $r_{yy} = 0$, que implica que todas as derivadas em y de ordem superiores são zero. Examinando-se as fórmulas obtidas anteriormente, nota-se que $\phi^{(4)} = 0$ e, conseqüentemente, qualquer correção de ordem superior é zero. Para este caso particular a aproximação assintótica fornece uma solução exata de (9, 10) que pode ser facilmente verificada substituindo-a na equação original (8). Escreve-se a seguir as fórmulas obtidas anteriormente para o caso particular onde existe uma solução exata.

A primeira forma é

$$Z(t, y; T) = e^{-(\phi^{(0)}(t, y; T) + \varepsilon^2 \phi^{(2)}(t; T))}, \quad (18a)$$

onde $\phi^{(0)}$ é

$$\phi^{(0)}(t, y; T) = \int_t^T r(s, y) ds, \quad (18b)$$

e o termo de correção $\phi^{(2)}$ é

$$\phi^{(2)}(t; T) = -\frac{1}{2} r_0^2 \int_t^T \alpha^2(s) \left(\int_s^T \lambda(s') ds' \right)^2 ds. \quad (18c)$$

A segunda forma pode ser escrita como

$$Z(t, y; T) = \frac{D(T)}{D(t)} e^{-(\Delta\phi^{(0)}(t, y; T) + \varepsilon^2 \Delta\phi^{(2)}(t; T))}, \quad (19a)$$

$$\Delta\phi^{(0)}(t, y; T) = r_0 y \int_t^T \lambda(s) ds, \quad (19b)$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{(2)}(t; T) = \frac{1}{2} r_0^2 \int_t^T \lambda(s) ds \left\{ \int_0^t \alpha^2(s) ds \int_t^T \lambda(s) ds \right. \\ \left. + 2 \int_0^t \alpha^2(s) \int_s^t \lambda(s') ds' ds \right\}. \end{aligned} \quad (19c)$$

Note que (19) fornece uma dependência de Z relativamente simples em termos dos parâmetros do modelo, em especial, para o caso de parâmetros constantes. Isso é particularmente útil para a calibragem. Especificamente, pode-se notar que o parâmetro θ não se encontra presente nos termos de correção, sugerindo que ele pode ser usado exclusivamente para calibrar o modelo a uma dada curva de desconto $D(T)$, enquanto que os outros parâmetros podem ser reservados para a calibragem do modelo com outros instrumentos.

6 Parâmetros constantes para HW

O caso particular com θ , κ , and $\tilde{\alpha}$ constantes fornecem fórmulas simples onde todas as integrais podem ser avaliadas explicitamente. Escreve-se abaixo (19) para este caso.

Como $\lambda(t) = e^{-\kappa t}$, $\bar{X}(t) = \frac{\theta}{\kappa} (1 - \lambda(t))$ e $\alpha(t) = \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda(t)}$ obtém-se

$$Z(t, y; T) = \frac{D(T)}{D(t)} e^{-(\Delta\phi^{(0)}(t, y; T) + \varepsilon^2 \Delta\phi^{(2)}(t; T))}, \quad (20a)$$

onde

$$\Delta\phi^{(0)}(t, y; T) = r_0 \lambda(t) \left[\frac{1 - \lambda(T - t)}{\kappa} \right] y, \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{(2)}(t; T) = \frac{r_0^2 \tilde{\alpha}^2}{4} \left[\frac{1 - \lambda(T - t)}{\kappa} \right] \left[\frac{1 - \lambda(t)}{\kappa} \right] \\ \left[\frac{3 + \lambda(T - t) - \lambda(t)(1 - \lambda(T - t))}{\kappa} \right]. \end{aligned} \quad (20c)$$

7 Simulações numéricas

São apresentadas várias simulações numéricas que usam as fórmulas obtidas nas seções anteriores. Em particular, são usados os modelos para r em (1c) que correspondem aos valores $\nu = 0$ (BK), $\nu = \frac{1}{2}$ (CIR) e $\nu = 1$ (HW).

As simulações usam κ and $\tilde{\alpha}$ constantes, e consideram dois casos para o parâmetro $\theta(t)$. O primeiro caso usa θ constante e é usado para descrever as propriedades do modelo na sua versão mais simples. A segunda forma usa θ constante em um número finito de intervalos e é o caso mais simples, depois do primeiro caso, que permite calibrar o modelo a uma dada curva de desconto $D(T)$ que é conhecida somente em um número finito de vencimentos $T = T_i, i = 1, \dots, n$.

Se θ, κ e $\tilde{\alpha}$ são constantes, (4) reduz-se a

$$\begin{aligned}\bar{X}(t) &= \frac{\theta}{\kappa} (1 - \lambda(t)), \\ \lambda(t) &= e^{-\kappa t}.\end{aligned}$$

Se θ é constante por intervalos e os demais parâmetros constantes,

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{\kappa} \left[\theta_{m+1} - \lambda(t) \left(\theta_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ T_i < t}}^m \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\lambda(T_i)} \right) \right],$$

onde m é o maior inteiro positivo tal que $T_m < t$ e $\theta(t) = \theta_i$, para $T_{i-1} < t \leq T_i$, com $T_0 := 0$. Em qualquer um dos dois casos considerados para θ , \bar{X} é pelo menos C^0 e, dado que aparece primeiramente em (12b) como um integrando, Z é pelo menos C^1 como função de t .

Procede-se listando as questões investigadas nas seções seguintes:

1. Qual é o procedimento mais simples que permite uma ajuste exato a valores dados de taxas de desconto?
2. Qual é magnitude de cada uma das correções para os diversos modelos?

8 Produzindo curvas de desconto interpoladas

Taxas de desconto não são conhecidas para todos os vencimentos T , sendo conhecidas apenas para um número finito de vencimentos T_i . Apresenta-se, a seguir, o caso mais simples que permite interpolar os dados conhecidos, produzindo, assim, um interpolador natural para taxas de desconto, isto é, um que é consistente com um modelo especificado.

O procedimento assume que κ e $\tilde{\alpha}$ são dados e encontra $\theta(t)$ da forma

$$\theta(t) = \theta_i, \quad \text{para } T_{i-1} < t \leq T_i, \quad (21)$$

com $T_0 := 0$, sequencialmente selecionando θ_i tal que

$$Z(0, 0; T_i) = D(T_i), \quad (22)$$

para $i = 1, \dots, n$, onde n é o número total de vencimentos para os quais as taxas de desconto são conhecidas.

Esta simulação usa dados sobre a estrutura a termo das taxas de juro de títulos públicos em US\$, disponíveis em 9 de Maio de 2003. As taxas são conhecidas para os vencimentos: 1, 3 e 6 meses e 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20 e 30 anos. e são mostrados na tabela 1.

Table 1: Curva de Desconto

T_i	$D(T_i)$
0.08	0.99910040
0.25	0.99722885
0.50	0.99431621
1.00	0.98777534
2.00	0.97083379
3.00	0.94572826
5.00	0.87371591
7.00	0.79652242
10.00	0.68591607
20.00	0.39062784
30.00	0.23621804

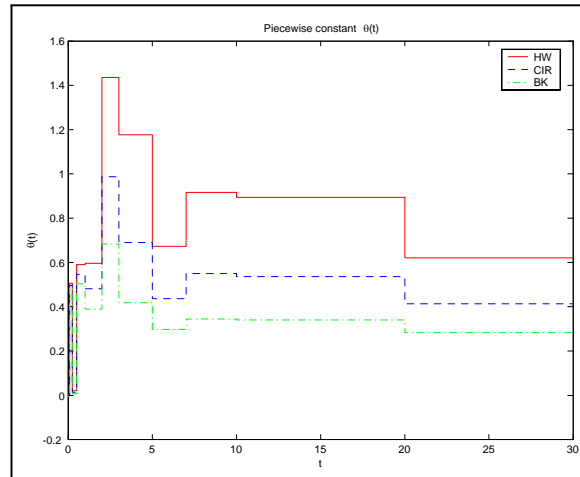
A tolerância usada na solução de (22) é de 10^{-8} . Seleciona-se $\kappa = 20\%$ e $\tilde{\alpha} = 10\%$. Observa-se que, por conveniência, a escala de ε é incorporada, sem perda de generalidade, ao parâmetro $\tilde{\alpha}$, ou, de outra forma, nas fórmulas acima é feita a substituição $\varepsilon\tilde{\alpha} \mapsto \tilde{\alpha}$.

As tabelas 2, 3 e 4 mostram os parâmetros θ dos modelos HW, CIR e BK calibrados às taxas de desconto dadas.

A figura 1 mostra os $\theta(t)$ para os modelos calibrados até $O(\varepsilon^2)$. As calibrações até $O(\varepsilon^4)$ produzem resultados similares, como foi visto nas tabelas 2-4.

Table 2: $\theta(t)$ para HW. Calibragem até $O(1)$ e $O(\varepsilon^2)$

T_i	$\theta_i(\text{HW}_0)$	$\theta_i(\text{HW}_2)$
0.08	0.00000000	0.00000297
0.25	0.50557105	0.50558710
0.50	0.02030867	0.02034507
1.00	0.58910806	0.58917360
2.00	0.59600131	0.59611774
3.00	1.43523444	1.43541172
5.00	1.17550704	1.17571401
7.00	0.67173256	0.67198737
10.00	0.91539937	0.91565449
20.00	0.89417358	0.89444347
30.00	0.61987338	0.62014319

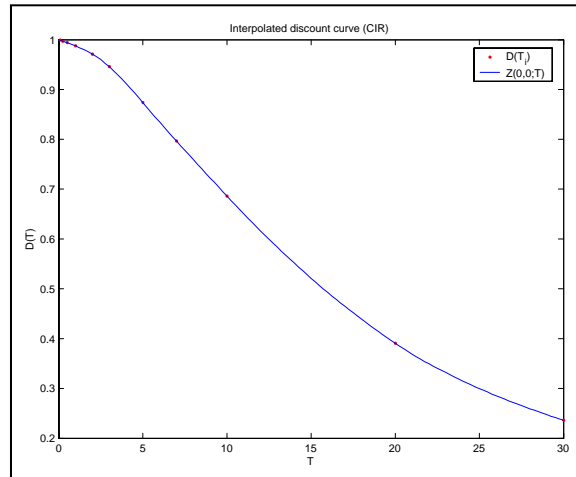


1. $\theta(t)$ constante por intervalos para HW, CIR e BK.

A figura 2 mostra a curva de desconto interpolada pelo modelo CIR. As curvas obtidas pelos outros modelos ajustam os dados de forma semelhante.

Table 3: $\theta(t)$ para CIR. Calibragem até $O(1)$, $O(\varepsilon^2)$, e $O(\varepsilon^4)$

T_i	$\theta_i(\text{CIR}_0)$	$\theta_i(\text{CIR}_2)$	$\theta_i(\text{CIR}_4)$
0.08	-0.00000010	-0.00248341	-0.00248341
0.25	0.49875624	0.49645967	0.49645968
0.50	0.01561017	0.01344553	0.01344555
1.00	0.54677987	0.54512098	0.54512102
2.00	0.48315011	0.48208660	0.48208669
3.00	0.98768017	0.98751668	0.98751678
5.00	0.69087922	0.69067283	0.69067285
7.00	0.43666212	0.43658289	0.43658273
10.00	0.54903411	0.54900796	0.54900764
20.00	0.53588374	0.53596757	0.53596702
30.00	0.41252019	0.41249953	0.41249889

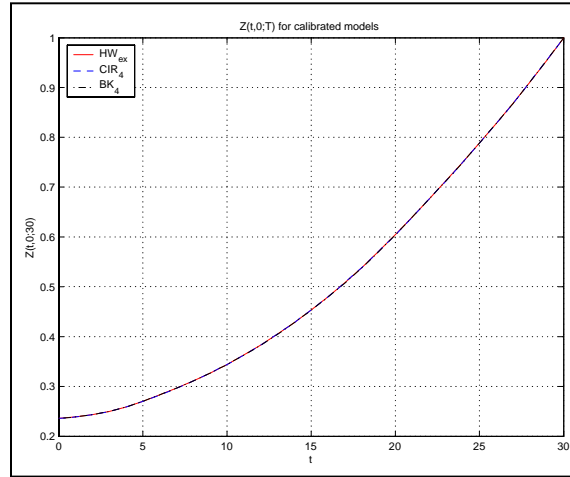


2. Curva de Desconto interpolada por CIR

A figura 3 mostra as curvas $Z(t, 0; T)$ como função de t para os três modelos considerados, com T fixo. Embora a calibragem seja realizada ao variar T com $t = 0$, as três curvas encontram-se sobrepostas, indicando a concordância entre os modelos quando t é variado.

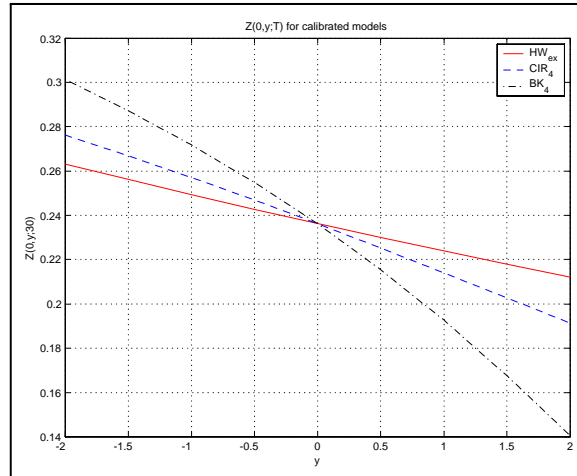
Table 4: $\theta(t)$ para BK. Calibragem até $O(1)$, $O(\varepsilon^2)$ e $O(\varepsilon^4)$

T_i	$\theta_i(\text{BK}_0)$	$\theta_i(\text{BK}_2)$	$\theta_i(\text{BK}_4)$
0.08	-0.00000010	-0.00496885	-0.00496953
0.25	0.49203393	0.48720290	0.48719938
0.50	0.01114902	0.00653250	0.00652514
1.00	0.50767936	0.50337851	0.50336692
2.00	0.39162381	0.38789933	0.38788416
3.00	0.68576096	0.68281580	0.68280405
5.00	0.42092171	0.41860836	0.41860795
7.00	0.29877049	0.29723934	0.29725068
10.00	0.34613914	0.34464637	0.34465637
20.00	0.34044187	0.33933599	0.33934772
30.00	0.28447687	0.28327988	0.28328630



3. $Z(t, 0; 30)$ para BK, CIR e HW.

Embora a condição de θ ser constante por intervalos tenha se mostrado suficiente para resolver o problema da interpolação, o procedimento é limitado dado que apenas um parâmetro é usado. A figura 4 mostra os diferentes modelos graficados sobre y .

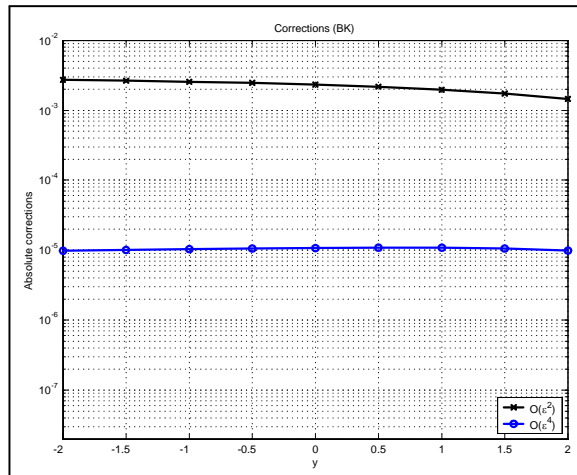


4. $Z(0, y; 30)$ para BK, CIR e HW.

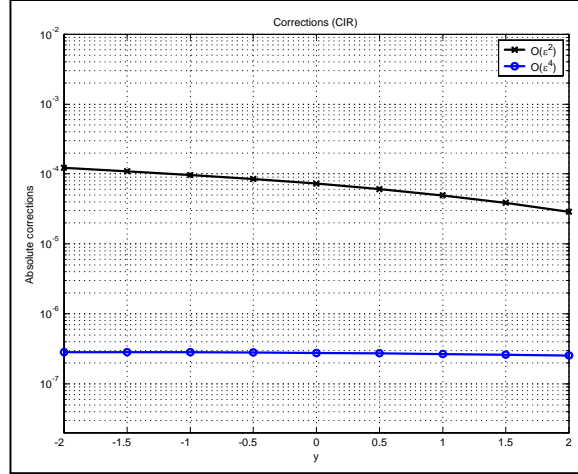
É necessário que os três modelos concordem em $y = 0$ mas, em geral, somente isso pode ser esperado. Em particular, para diferentes $\nu > 0$, observam-se diferentes inclinações em $y = 0$

$$Z_y(0, 0; T) = -r_0 D(T) \int_0^T \lambda(s) [1 + \nu \bar{X}(s)]^{\frac{1-\nu}{\nu}} ds.$$

As figuras 5 e 6 mostram a magnitude dos termos de correção para os modelos BK e CIR.



5. Correções para BK.



6. Correções para CIR.

9 Calibragem para o modelo HW

A seção anterior resolveu o problema da calibragem, tornando o modelo *gBK* livre de arbitragem. Esta seção considera o caso particular de HW para o qual é possível inverter, exatamente, o modelo para o parâmetro $\theta(t)$. Da mesma forma que na seção anterior, assume-se que κ e $\tilde{\alpha}$ são dados e encontra-se $\theta(t)$ da forma

$$\theta(t) = \sum_{j=1}^n \theta_j I_j(t), \quad (23)$$

$$\text{onde, } I_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } T_{j-1} < t \leq T_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (24)$$

com $T_0 := 0$, seqüencialmente selecionando θ_j tal que

$$Z(0, 0; T_i) = D(T_i), \quad (25)$$

para $i = 1, \dots, n$, onde n é o número total de vencimentos para os quais as taxas de desconto são conhecidas.

Para *HW* tem-se $\lambda(t) = e^{-\kappa t}$, $\alpha(t) = \tilde{\alpha} e^{\kappa t}$ e $\bar{X}(t) = e^{-\kappa t} \int_0^t \theta(s) e^{\kappa s} ds$. Em (18) pode-se ver que $\phi^{(2)}$ não depende de θ e que, portanto, isolando os termos que dependem de θ tem-se

$$\int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds = - \left[\frac{\log D_i + \phi^{(2)}(0; T_i)}{r_0} + T_i \right]. \quad (26)$$

O cálculo explícito do primeiro termo da igualdade acima pode ser feito e resulta em

$$\int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds = \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^n \theta_j K_{ij},$$

onde,

$$K_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ T_j - T_{j-1} - e^{-\kappa T_i} \left(\frac{e^{\kappa T_j} - e^{\kappa T_{j-1}}}{\kappa} \right), & \text{se } i \geq j. \end{cases}$$

Como a matriz $\mathbf{K} = (K_{ij})$ é triangular inferior, é fácil a inversão de $\mathbf{K}\theta = \mathbf{b}$ para $\theta = (\theta_j)$, com $\mathbf{b} = (b_i)$ sendo b_i dado pelo segundo termo da igualdade em (26). Especificamente

$$\theta_1 = \frac{\kappa}{K_{11}} b_1,$$

$$\theta_j = \frac{\kappa}{K_{jj}} \left(b_j - \sum_{i=1}^{j-1} \theta_i K_{ji} \right), \text{ para } j = 2, \dots, n.$$

Para completar o algoritmo é necessário explicitar

$$\phi^{(2)}(0; T_i) = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_0 \tilde{\alpha}}{\kappa} \right)^2 \left[T_i - \frac{3}{2\kappa} + \frac{2}{\kappa} e^{-\kappa T_i} - \frac{1}{2\kappa} e^{-2\kappa T_i} \right].$$

10 Validação das expansões assintóticas

Para $\nu \neq 1$ resolve-se numericamente o problema, via diferenças finitas implícitas de segunda ordem, para obter evidências parciais dos erros presentes nas aproximações assintóticas. A aproximação numérica é comparada com a aproximação assintótica (9). Resolve-se o caso com θ , κ e $\tilde{\alpha}$ constantes. Os parâmetros utilizados são dados na tabela 5.

Table 5: Parâmetros das simulações nas tabelas 6-9

Caso	θ	κ	$\tilde{\alpha}$	r_0
BK ($\nu = 0$)	9%	23%	5%	2%
CIR ($\nu = \frac{1}{2}$)	10%	21%	7%	2%
HW ($\nu = 1$)	10%	20%	10%	2%

As integrais são calculadas usando algoritmos adaptativos com tolerância 10^{-9} , escolhida tal que as diferenças entre as aproximações numérica e assintótica sejam maiores que ela, para a maioria dos casos. As exceções,

nesta simulação, ocorrem para T pequeno, onde as diferenças tendem a ser menores que a tolerância especificada.

Os resultados mostrados nas tabelas 6-9 estão limitados à exatidão da aproximação numérica, mas fornecem evidências para confirmar a validade da aproximação assintótica.

Table 6: Diferenças nas curvas de desconto para BK

T	$D(T)$ num.	$D(T)$ até $O(\varepsilon^2)$	Dif.
1.00	0.97933481	0.97933482	+6e-09
5.00	0.88860488	0.88860499	+1e-07
10.00	0.77341065	0.77341084	+2e-07
20.00	0.57569739	0.57569747	+8e-08
30.00	0.42662883	0.42662889	+6e-08

Table 7: Diferenças nas curvas de desconto para BK

T	$D(T)$ num.	$D(T)$ até $O(\varepsilon^4)$	Dif.
1.00	0.97933481	0.97933482	+2e-09
5.00	0.88860488	0.88860488	+2e-09
10.00	0.77341065	0.77341064	-1e-08
20.00	0.57569739	0.57569731	-8e-08
30.00	0.42662883	0.42662879	-4e-08

Table 8: Diferenças nas curvas de desconto para CIR

T	$D(T)$ num.	$D(T)$ até $O(\varepsilon^2)$	Dif.
1.00	0.97930367	0.97930367	-1e-10
5.00	0.88842465	0.88842464	-9e-09
10.00	0.77341212	0.77341211	-9e-09
20.00	0.57603747	0.57603750	+3e-08
30.00	0.42702144	0.42702146	+2e-08

11 Conclusão

- A diferença relativa entre a discretização do problema e a aproximação assintótica é menor que 0.0001%.
- Com base nos resultados das seções anteriores, pode-se dizer, de forma imprecisa, mas ilustrativa, que: o termo dominante da aproximação

Table 9: Diferenças nas curvas de desconto para CIR

T	$D(T)$ num.	$D(T)$ até $O(\varepsilon^4)$	Dif.
1.00	0.97930367	0.97930367	-5e-11
5.00	0.88842465	0.88842464	-9e-10
10.00	0.77341212	0.77341212	+1e-09
20.00	0.57603747	0.57603745	-2e-08
30.00	0.42702144	0.42702134	-1e-07

assintótica estabelece a *física* correta do problema; a primeira correção (com valor máximo em torno de 1%) é responsável pela *exatidão*; e a segunda correção (menor que 0.005%) proporciona *segurança*.

- A condição de $\theta(t)$ ser constante por intervalos é suficiente para obter ajustes exatos para dados de taxas de desconto.

References

- [1] J.D. Cole, “Perturbation Methods in Applied Mathematics”, Blaisdell, 1968.
- [2] J. Hull, “Options, Futures and Other Derivative Securities”, Prentice Hall, 1997.
- [3] M.H. Holmes, “Introduction to Perturbation Methods”, Springer-Verlag, 1995.
- [4] I. Karatzas, S.E. Shreve, “Brownian Motion and Stochastic Calculus” *2nd* edition, Springer-Verlag, 1991.
- [5] J. Kevorkian, J.D. Cole, “Multiple Scale and Singular Perturbation Methods”, Springer, 1996.
- [6] R. Rebonato, ”Interest-Rate Option Models”, Wiley, 1998.
- [7] F. Tourrucôo, “Perturbation Methods in Mathematical Finance: Zero-Coupon Bonds and Equivalent Volatilities” Ph.D. Thesis, 2004.