

Previsão de Curvas de Juros Zero-cupom: Estimação Não-paramétrica de Dados Funcionais

João F. Caldeira

Departamento de Economia - UFRGS

Hudson Torrent

Departamento de Estatística & PPGE - UFRGS

Abstract

Monetary policy makers and observers pay special attention to the shape of the yield curve as an indicator of the impact of current and future monetary policy on the economy, paying special attention to the forecasted yield curve. In this paper we consider a novel procedure to forecast the yield curve by using the methodology of estimating nonparametric functional data (NP-FDA). With this approach, each element of the sample is a daily yield curve, measured in points corresponding to maturities. In this paper forecasts of yield curve are made for horizons of one day, five days and one month ahead, using the functional kernel estimator. The results are compared with traditional parametric models of Nelson & Siegel (1987) with extensions by Diebold & Li (2006), Svensson (1994) and Pooter (2007). Our estimates with NP-FDA present the predictive performance superior to its competitors in 10 of 15 maturities analysed.

Resumo

Formuladores de política monetária e analistas dão especial atenção à forma da curva de juros como um indicador do impacto de políticas monetárias atuais e futuras sobre a economia, sendo de grande interesse a previsão da curva de juros. Neste artigo introduzimos uma nova forma de estimar e prever a curva de juros zero-cupom, utilizando a metodologia de estimação não-paramétrica de dados funcionais. Nessa metodologia, cada elemento da amostra é uma curva de juros diária, avaliada nos pontos correspondentes às maturidades. Neste trabalho faremos previsão um passo a frente para a curva de juros utilizando o estimador kernel funcional. Os resultados são comparados com modelos paramétricos tradicionais de Nelson & Siegel (1987) com extensões por Svensson (1994), Diebold & Li (2006) e Pooter (2007). Nossas estimativas apresentam performance preditiva superior a de seus concorrentes em 10 das 15 maturidades consideradas.

Key words: Term structure estimation, factor models, yield curve forecast, nonparametric estimation, functional data analysis, nonparametric estimations of functional data.

Palavras Chave: Estrutura a termo da taxa de juros, modelos de fatores, previsão de curvas de juros, estimação não-paramétrica, análise de dados funcionais, estimação não-paramétrica de dados funcionais.

JEL C53, E43, G17

1. Introdução

Formuladores de política monetária e analistas de mercado prestam especial atenção ao formato da curva de juros como um indicador do impacto de políticas monetárias corrente e futura na economia. A estrutura a termo da taxa de juros define a relação entre o *yield* de um título de renda fixa e o tempo até o vencimento do seu fluxo de caixa (maturidade). Assim, a curva de juros zero-cupom fornece a relação para títulos que fazem apenas um pagamento, na maturidade. A curva de juros zero-cupom serve como base para precificação de outros instrumentos de renda fixa e como *input* para vários modelos, por exemplo, gestão de risco, política monetária e precificação de derivativos. Embora os preços de títulos zero-cupom possam ser usados para construir a curva de juros diretamente, a falta de liquidez do mercado e o limitado espectro de maturidades disponíveis levam à necessidade da estimação através dos preços de títulos com cupom. Entretanto, fazer inferências a respeito da curva de juros é como ler folhas de chá (fazer magia) se não tiver as ferramentas adequadas para análise da curva de juros.

A literatura sobre interpolação e ajuste da curva de juros pode ser dividida em métodos paramétricos e não-paramétricos. Para a classe de modelos não-paramétricos, os mais representativos são McCulloch (1971, 1975) e Vasicek (1977). McCulloch (1971, 1975), propõe o uso de splines para ajustar a função de desconto da estrutura a termo segmentada. Vários outros métodos baseados em spline foram propostos, bem como o uso de funções de penalidade, como o modelo de spline penalizado de Fisher *et al.* (1995). Vasicek (1977) (Vasicek, daqui em diante), assume que a taxa de juro de curto prazo segue um processo de difusão Markoviano contínuo univariado e os todos preços de títulos zero-cupom são função da taxa de juros de curto prazo, do tempo corrente e da maturidade do título. Enquanto Vasicek usa um processo Uhlenbeck & Ornstein (1930) para a taxa de juro de curto prazo, Cox *et al.* (1985) (CIR, daqui em diante) propõem um processo de difusão (raiz quadrada) unidimensional, assegurando que as taxas de juro de curto prazo sejam positivas. Além dos modelos de Vasicek e CIR, os modelos multifatores de Duffie & Kan (1996) e Dai & Singleton (2002) também pertencem a classe de modelos fundamentais. Foram propostos outros modelos baseados em Vasicek e CIR, os quais assumem uma estrutura a termo endógena. Exemplos dos chamados modelos endógenos ou de não-arbitragem são Ho & Lee (1986), Hull & White (1990) e Black & Karasinski (1991).

Uma outra classe de modelos, que não é deduzida de condições de equilíbrio e/ou não-arbitragem, assume uma abordagem mais empírica. Em geral, tais modelos assumem uma forma paramétrica para as taxas à vista, taxas *forward* ou função de desconto. Os parâmetros desconhecidos são estimados minimizando o erro entre os preços teóricos e observados de um *cross section* de títulos zero-cupom, em determinado ponto do tempo. O método de Fama & Bliss (1987) extrai as taxas *forward* iterativamente, estendendo a função de desconto a cada passo do processo de cálculo, *i.e.*, as taxas *forward* são calculadas para precificar títulos com maturidades crescentes, dada a função de desconto ajustada para o título com maturidade mais curta. As taxas à vista ou *forward* resultantes desse processo são referidas como taxas não-suavizadas de Fama & Bliss. A função de desconto é linear *piecewise* com o número de parâmetros igual ao número de títulos incluídos. O procedimento funciona bem apenas se todos os fluxos de caixa apresentam o mesmo intervalo de maturidades (ver Hagan & West, 2005). Nelson & Siegel (1987) (NS, daqui em diante), propõem uma função paramétrica parcimoniosa com quatro fatores, da família das funções polinomiais exponenciais gerais para a curva de juros, a qual foi expandida mais tarde por Svensson (1994) (SV, daqui em diante). As duas especificações são capazes de reproduzir uma variedade das possíveis formas assumidas pela curva de juros. Entretanto,

os modelos paramétricos não são imunes a problemas. Os modelos NS e SV não são formulados em uma estrutura dinâmica e o primeiro modelo não é condizente com não-arbitragem (ver Filipovic, 2009; Bjork & Christensen, 1999; Diebold *et al.*, 2005; Christensen *et al.*, 2009). A primeira desvantagem foi abordada por Diebold & Li (2006) (DL daqui em diante), que aplicaram iterativamente uma versão simplificada do modelo de NS para um conjunto de dados dinâmicos da curva de juros. Posteriormente, estimaram modelos de séries de tempo comum para a série temporal de parâmetros a fim de gerar previsões para a curva de juros de zero-cupom, (a esse respeito ver Diebold *et al.*, 2006a; Almeida *et al.*, 2008; Caldeira *et al.*, 2010). Alguns autores dedicaram atenção ao segundo problema, por exemplo, (ver Christensen *et al.*, 2007, 2009; Laurini & Hotta, 2010).

Embora os modelos paramétricos sejam importantes ferramentas para a estimação e previsão da curva de juros, acreditamos ser desejável a busca por alternativas capazes de superar inerentes limitações desses modelos. Nesse sentido, a flexibilidade de modelos não-paramétricos surge como opção de interesse. Entretanto, nas formulações não-paramétricas citadas (por exemplo, McCulloch (1971, 1975)), o ajuste é de natureza cross-section, ignorando a dinâmica existente na curva de juros no tempo. Tendo isso em mente, introduzimos uma nova forma de estimar e prever a curva de juros zero-cupom. A contribuição do trabalho consiste em usar estimação não paramétrica de dados funcionais, via método kernel, para fazer previsão um passo a frente para a curva de juros¹. Na abordagem funcional, a amostra consiste em uma sequência de n curvas $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, onde $X_i = \{X_i(t); t \in T\}$ e $T \subset \mathbb{R}$.² Especificamente, no caso da curva de juros, cada curva que compõe a amostra representa a curva de juros de um dia, avaliada nas maturidades consideradas. Essa forma de descrever o problema possui vantagens em relação aos demais modelos descritos: primeiramente, por se tratar de estimação não-paramétrica, possui flexibilidade maior do que os modelos paramétricos; segundo, tem a vantagem de considerar a dinâmica das curvas no processo de estimação, o que é particularmente interessante na estimação de curva de juros e constitui uma vantagem em relação aos métodos de interpolação não-paramétricos citados anteriormente.

Este trabalho possui mais cinco seções além desta introdução. Na seção seguinte definimos o objeto de estudo, qual seja, a curva de juros zero-cupom. Na seção 3, apresentaremos a metodologia de análise de dados funcionais proposta, que será aplicada à previsão da curva de juros. Na quarta seção, desenvolvemos a metodologia de métodos paramétricos tradicionalmente usados em previsão para a curva de juros. Na seção 5, a performance preditiva dos métodos paramétricos citados é comparada com a performance do modelo funcional não-paramétrico proposto. A seção 6 estabelece algumas conclusões.

2. Curva de juros zero-cupom

Antes de discutirmos o problema específico de modelagem e estimação da curva de juros zero-cupom, introduzimos as definições de alguns termos básicos usados na literatura sobre renda fixa e a notação associada. As duas classes de títulos fundamentais em renda fixa são os zero-cupom e os títulos com cupons fixos. O primeiro tipo de título é um instrumento de renda fixa que faz apenas um pagamento na maturidade, enquanto o segundo tipo paga um cupom fixo periodicamente e liquida o principal no vencimento.

Para títulos zero-cupom a taxa de juros à vista pode ser derivada diretamente dos preços observados. Já

¹Em versões posteriores consideraremos ajuste e previsão para horizontes mais distantes para a curva de juros.

²Para exposição sistemática a respeito de dados funcionais ver Ramsay & Silverman (1997) e Ferraty & Vieu (2006).

para os títulos com cupom são cotados apenas por *yield to maturity*, ou *par yield*. O *yield to maturity* é a taxa interna de retorno, que é a taxa de juros constante, y_k , que faz com que o valor presente seja igual ao preço do título:

$$P_k = \sum_{i=0}^n \frac{CF_i}{(1 + y_k)^{t_i}} \quad (1)$$

onde P_k é o preço do título k que paga n fluxos de caixa nos períodos $t_j (j = 1, \dots, n)$. Estes fluxos de caixa consistem dos pagamentos dos cupons e a liquidação do principal ou valor de face. A *yield to maturity* em títulos com cupom de mesma maturidade mas com diferentes pagamentos de cupons não são iguais. Em particular, a *yield to maturity* em um título com cupom difere da *yield to maturity*, ou taxa à vista, de um zero-cupom com mesma maturidade. No entanto, se a estrutura de fluxo de caixa de um título negociado no mercado (*ao par* é conhecida, é possível derivar das taxas de juros à vista estimadas teoricamente a *yield to maturity* dos títulos com cupons. Com base nas taxas à vista, $y_t(\tau)$, a equação do preço pode ser expressa como:

$$P_k = \frac{C}{(1 + y_t(1))} + \frac{C}{(1 + y_t(2))^2} + \dots + \frac{C}{(1 + y_t(\tau))^\tau} + \frac{V}{(1 + y_t(\tau))^\tau} \quad (2)$$

onde C representa os pagamentos de cupons e V o principal. A *yield to maturity* de um título com cupom é, portanto, uma média das taxas à vista, as quais, geralmente, variam com a maturidade.

A estimação da curva de juros zero-cupom se baseia numa suposta relação funcional entre taxas ao par (*par yields*), taxas à vista, taxas *forward* ou fatores de desconto de um lado e maturidades do outro. Fatores de desconto são quantidades usadas em dado ponto do tempo para obter o valor presente de um fluxo de caixa. Uma função de desconto é uma coleção de fatores de desconto no tempo t para todas as maturidades τ . A taxa à vista, taxa zero-cupom ou *zero yield* $y_t(\tau_j)$ denota a taxa de juros paga por um título com desconto para certa maturidade τ_j . Com taxas compostas continuamente e na ausência de oportunidades de arbitragem, o preço justo de um título sem cupom, P_j que paga \$1 na maturidade é dado por:

$$P_j = e^{y(\tau_j)\tau_j} \quad (3)$$

A curva de juros à vista (ou *curva de juros zero-cupom*) mostra as taxas à vista para diferentes maturidades. A taxa *forward*, $f(r, t)$ é a taxa contratada agora para ser paga por um investimento futuro entre r e t ($r < t$), com taxas y_r e y_t . A taxa *forward* como função das maturidades é a curva *forward*. Assumindo novamente taxas compostas continuamente, observamos a seguinte relação entre taxas à vista e taxas *forward*:

$$e^{y(\tau_r)\tau_r} e^{f(r,t)(\tau_t - \tau_r)} = e^{y(\tau_t)\tau_t} \quad (4)$$

O que pode ser resolvido para a taxa *forward*:

$$f(r, t) = \frac{y(\tau_j)\tau_j - y(\tau_r)\tau_r}{\tau_t - \tau_r} \quad (5)$$

A taxa *forward* instantânea descreve o retorno de um investimento por um período infinitesimal depois de r .

$$f(r) = \lim_{t \rightarrow r} f(r, t) \quad (6)$$

Uma outra interpretação para a taxa *forward* instantânea é que ela representa o crescimento marginal no

retorno total decorrente de um aumento marginal no período do investimento. Assim, a taxa à vista pode ser interpretada como a média das taxas *forwards* instantâneas:

$$y(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(x) dx \quad (7)$$

Onde τ representa o tempo até a maturidade (ou simplesmente, a maturidade).

3. Metodologia de Dados Funcionais e Estimação Não-Paramétrica via Kernel

Nesta seção apresentamos a metodologia de análise de dados funcionais e o procedimento de estimação desses dados, que serão aplicados ao problema da estimação e previsão da curva de juros. Para mais detalhes sobre a metodologia de dados funcionais ver Ramsay & Silverman (1997). Ver também Ferraty & Vieu (2006) para metodologia não-paramétrica de dados funcionais.

3.1. Dados Funcionais

Uma variável aleatória \mathbf{X} é chamada uma variável funcional se toma valores em um espaço infinito dimensional (ou seja, em um espaço funcional). Uma observação X de \mathbf{X} é chamado um dado funcional. No caso da curva de juros, X será uma curva cujo domínio é um subconjunto da reta real. Mais precisamente, quando \mathbf{X} (respectivamente X) denota uma curva aleatória (respectivamente sua observação), estaremos fazendo a identificação $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t); t \in T\}$ (respectivamente $X = \{X(t); t \in T\}$), onde $T \subset \mathbb{R}$. Definiremos E como o espaço funcional onde \mathbf{X} toma valores. Nesse ponto, vale ressaltar que uma questão crucial no contexto funcional é a noção de distância entre as curvas que compõem o espaço E . Na próxima subseção discutiremos o papel de semimétricas como medidas de distância entre os elementos do espaço funcional.

3.2. Espaços Semi-métricos

Em espaços infinito dimensionais, como os espaços funcionais em questão, não há equivalência entre normas e a escolha da norma preliminar torna-se crucial. Além disso, para o tipo de dados que queremos analisar, espaços semi-métricos são mais bem adaptados do que espaços métricos.³ Uma semi-métrica d pode ser definida como uma métrica, exceto pelo fato de que na semi-métrica $d(x, y) = 0$ não implica que $x = y$, onde $x, y \in E$. Como dito anteriormente, a escolha de semi-métrica é de fundamental importância para a performance do método. Diferentes semi-métricas estão disponíveis na literatura. Para o caso que queremos analisar uma semi-métrica adequada é a semi-métrica baseada na redução de dimensionalidade via Análise de Componentes Principais (PCA). Vale notar que estamos considerando uma amostra de curvas, que são realizações de uma variável aleatória funcional. Entretanto, na prática observamos cada curva avaliada num número finito de pontos. Quando o número de pontos nos quais avaliamos a curva é pequeno, a semi-métrica baseada em PCA é bastante indicada. Em particular, cada curva de juros que compõe a amostra será avaliada em 15 pontos, que são as maturidades consideradas. Em seguida, detalhamos a métrica PCA e sua versão empírica conforme Ferraty et al. (2005).

³Para detalhes ver Ferraty e Vieu (2006) seção 3.1.

Sob a hipótese de que $E \int X^2(t)dt < \infty$, podemos expandir a variável aleatória funcional X da seguinte forma:

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int X(t)v_k(t)dt \right) v_k, \quad (8)$$

onde v_1, v_2, \dots são as autofunções ortonormais do operador de covariância $\Gamma_X(s, t) = E(X(s)X(t))$ associadas aos autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Consideremos agora

$$\tilde{X}^{(q)} = \sum_{k=1}^q \left(\int X(t)v_k(t)dt \right) v_k, \quad (9)$$

a versão truncada da expansão de X (eq.(8)). Então, para todo $(x_1, x_2) \in E^2$ temos a seguinte família parametrizada de semimétricas:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^q \left(\int (x_1(t) - x_2(t))v_k(t)dt \right)^2}. \quad (10)$$

Como, na prática, Γ_X é não observável e, conseqüentemente, os v_k 's também não, devemos estimar Γ_X através de sua versão empírica $\Gamma_X^n(s, t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i(s)X_i(t)$. Pode-se mostrar que as autofunções $v_{k,n}(\cdot)$ de Γ_X^n são estimadores consistentes das autofunções associadas a Γ_X .

Portanto, a versão empírica da semimétrica que será utilizada na estimação e na previsão da curva de juros (semi-métrica PCA) é definida para todo $(x_1, x_2) \in E$ por

$$d_q(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{k=1}^q \left(\int (x_1(t) - x_2(t))v_{k,n}(t)dt \right)^2}. \quad (11)$$

Na próxima subseção apresentamos o estimador kernel funcional para regressão não-linear.

3.3. Estimação Funcional Não-Paramétrica via Kernel

Estamos interessados em prever uma resposta escalar Y em termos de um regressor funcional \mathbf{X} . Seja r o operador de regressão não-linear definido por

$$r(X) = E(Y|\mathbf{X} = X) \quad (12)$$

onde \mathbf{X} é uma variável funcional tomando valores em algum espaço semi-métrico (E, d) , Y é uma variável aleatória real e X é um elemento fixo em E .

Sejam $(\mathbf{X}_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$, n pares observados. O estimador kernel do operador linear proposto por Ferraty e Vieu (2006) é

$$\hat{r}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K(h^{-1}d(X, \mathbf{X}_i))}{\sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(X, \mathbf{X}_i))} \quad (13)$$

onde d é uma semimétrica apropriada (no nosso caso, a semi-métrica PCA), K é um kernel assimétrico, visto que a d assume sempre valores não negativos e $h > 0$ é uma bandwidth.

3.4. Previsão da Curva de Juros

Na seção 6 apresentaremos a previsão para a curva de juros. As estimativas serão comparadas com aquelas obtidas por métodos de estimação tradicionais na literatura de previsão de curva de juros. A previsão será feita a partir da estimação funcional não-paramétrica via kernel descrita nas subseções acima. Nesse caso, cada dia constitui uma curva de juros, que, por sua vez, corresponde a uma observação ou realização, X_i , da variável aleatória \mathbf{X} em questão. A resposta ou variável dependente, Y_i , é a taxa de juros referente a última maturidade considerada referente à curva i^4 .

4. Modelos paramétricos para ajuste e previsão da curva de juros

O princípio básico dos modelos paramétricos está na especificação de uma função valor, que é definida sobre todo o domínio das maturidades. Enquanto as várias abordagens nesta classe de modelos defendem diferentes escolhas da função, compartilham a abordagem geral de que os parâmetros do modelo sejam determinados através da minimização dos desvios quadrados dos preços observados em relação aos teóricos. Duas das principais abordagens para modelar a curva de juros, conforme relatório do BIS (2005), são discutidas brevemente a seguir.

4.1. Modelo de Nelson & Siegel

Nelson & Siegel (1987), propõem uma função parcimoniosa para modelar a taxa *forward* instantânea como solução para uma equação diferencial de segunda ordem para o caso de raízes iguais:

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda_{1,t}}\right) + \beta_{3,t} \left[\frac{-\tau}{\lambda_{1,t}} \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda_{1,t}}\right) \right]. \quad (14)$$

com o vetor de parâmetros a ser estimado $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1)$. Como na equação 7, a taxa à vista é a média das taxas *forwards* instantâneas:

$$y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(\tau) d\tau,$$

A curva de juros zero-cupom resultante é:

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left[1 - \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda_1}\right) \right] \left(\frac{\tau}{\lambda_1}\right)^{-1} + \beta_3 \left(\left[1 - \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda_1}\right) \right] \left(\frac{\tau}{\lambda_1}\right)^{-1} - \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda_1}\right) \right) \quad (15)$$

Diebold & Li (2006) reinterpretaram o modelo proposto por Nelson & Siegel (1987), que consideram uma forma paramétrica para o comportamento da estrutura a termo ao longo do tempo, na qual os coeficientes são tratados como nível, inclinação e curvatura da curva de juros.

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{\lambda_t \tau} \right). \quad (16)$$

Para as maturidades longas, as taxas à vista e *forwards* aproximam assintoticamente do valor β_0 , o qual deve ser positivo. $(\beta_0 + \beta_1)$ determinam o valor inicial da curva na maturidade zero; assim, β_1 representa o desvio

⁴Essa formulação nos permite usar a rotina de Ferraty & Vieu. Para detalhes ver Ferraty & Vieu(2006), seção 12.4

da assíntota β_0 . Além disso, $(\beta_0 + \beta_1)$ também deve ser positivo. Os dois parâmetros restantes β_2 e τ são responsáveis pela curvatura. A magnitude da curvatura é dada pelo valor absoluto de β_2 , enquanto a direção é dada pelo sinal: um sinal negativo indica uma forma de U , enquanto um sinal positivo indica forma de U invertido. τ , o qual também deve ser positivo, determina a posição da curvatura.

4.2. Modelo de Svensson

Para melhorar a flexibilidade das curvas e o ajuste, Svensson (1994) amplia o modelo de Nelson & Siegel (1987), adicionando um outro termo que possibilita uma segunda curvatura. A precisão extra é alcançada ao custo de adicionar mais dois parâmetros, β_4 e τ_2 , os quais precisam ser estimados. A curva de juros resultante é dada por:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau} \right) + \beta_{4,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau} \right). \quad (17)$$

Esta especificação permite uma segunda curvatura na curva de juros. Assim, o método de Svensson (1994) é mais flexível e geralmente tem melhor ajuste que o modelo de Nelson & Siegel (1987), com o custo de ser menos parcimonioso.

Baseado na função da curva de juros à vista proposta por NS e SV, várias extensões foram desenvolvidas. Para simplificar o procedimento de estimação DL sugere reduzir o vetor de parâmetros para $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ fixando o valor de λ em um valor especificado a priori. Um potencial problema de multicolinearidade no modelo de SV surge se os parâmetros de decaimento λ_1 e λ_2 assumem valores similares. Para contornar o problema de multicolinearidade, Pooter (2007) propõe substituir o último termo em (17), i.e., $-\exp \frac{-\tau}{\lambda_2}$ por $-\exp \frac{-2\tau}{\lambda_2}$. Esta especificação é chamada aqui de modelo de Svensson ajustado.

Devido ao sucesso alcançado pelo modelo de NS, não surpreendentemente, é cada vez mais usado em outras aplicações. Mönch (2008) e Fabozzi *et al.* (2005) mostram que o modelo NS produz previsões que não são apenas estatisticamente acuradas, mas também economicamente significantes na medida em que podem ser usadas para gerar investimentos com retornos substanciais. Diebold *et al.* (2006a), empregaram o modelo NS para estudar as interações entre variáveis macroeconômicas e a curva de juros (ver também Diebold *et al.*, 2005), enquanto Diebold *et al.* (2006b) aplicam o modelo para identificar fontes de risco sistemático e constroem uma medida generalizada de duration.

5. Procedimentos de estimação

As diferentes especificações do modelo NS analisadas são todas aninhadas e podem ser capturadas por uma configuração geral do modelo em formato de espaços de estados, como descrito em Hamilton (1994), por exemplo:

$$Y_t = X_t \beta_t + \varepsilon_t \quad (18)$$

$$\beta_t = \mu + \Phi \beta_{t-1} + \nu_t \quad (19)$$

Onde β_t é o vetor de fatores ($K \times 1$) e X_t é matriz de pesos dos fatores ($n \times K$).

A equação de medida 18 especifica o vetor de taxas de juros para as n maturidades, $Y_t = [y_t(\tau_1), \dots, y_t(\tau_n)]'$, como a soma da curva de juros à vista de NS, $X_t \beta_t$, mais um vetor de termos de erros, os quais são supostos

independentes entre as maturidades mas com diferentes termos de variância, $\sigma^2(\tau_i)$. Cada uma das especificações consideradas do modelo: NS, SV ou com a variação proposta pro De Pooter, é um caso especial de (18), com diferentes números de fatores e/ou diferentes especificações para os pesos dos fatores.

Se o objetivo fosse apenas ajustar a estrutura a termo era necessário apenas a equação de medida. Para gerar previsões da estrutura a termo é necessário modelar também a dinâmica dos fatores. Seguindo o padrão na literatura, a dinâmica dos fatores na equação dos estados (19) é especificada como um processo autorregressivo de primeira ordem, considerando processos $AR(1)$ e $VAR(1)$. O vetor μ e a matriz Φ tem dimensões $(K \times 1)$ e $(K \times K)$, respectivamente. O modelo é completado assumindo que a equação de media e o vetor de erros da equação dos estados são ortogonais e normalmente distribuídos:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \nu_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix} \right] \quad (20)$$

Onde H é uma matriz $(n \times n)$ a qual é assumida diagonal. A matriz de covariância da equação dos estados é uma matriz diagonal $(K \times K)$ ou completa, dependendo do procedimento de estimação.

5.1. Abordagem de dois passos com parâmetro de decaimento estimado

Existem várias abordagens para estimar os fatores latentes e parâmetros na representação do espaço de estado do modelo de Nelson-Siegel. Estas abordagens dependem crucialmente se as equações de medida e estado são estimadas separadamente ou simultaneamente e das suposições acerca do parâmetro de decaimento. A abordagem mais direta consiste de um procedimento em dois passos e é empregada, por exemplo, em Diebold & Li (2006) e Almeida *et al.* (2008). Na primeira etapa a equação de medida é tratada como um modelo *cross section* e é empregado o método de mínimos quadrados para estimar os parâmetros para todos os dias separadamente. Na segunda etapa a dinâmica dos fatores é especificada e ajustada por modelos de séries de tempo.

Diebold & Li (2006), sugerem fixar λ no modelo de três fatores em um valor pré-especificado e manter esse valor para todo t , ao invés de tratá-lo como um parâmetro desconhecido. Almeida *et al.* (2008), propõem o uso de quatro regras para determinar o valor do parâmetro de decaimento. Na primeira regra o parâmetro de decaimento é determinado de forma a minimizar a soma dos quadrados dos erros de ajuste dentro da amostra. Nas outras três regras os dados dentro da amostra são divididos em duas sub-bases. Em seguida escolhem-se os valores para o parâmetro de decaimento que minimizam o erro médio quadrático total das previsões diárias da ETTJ na segunda sub-base para horizontes de previsão de 1 dia, 1 semana (5 dias úteis) e 1 mês (21 dias úteis). Em todos estes casos, a equação de medida que é não-linear no vetor de estados torna-se linear e pode ser estimada por OLS *cross section*.

O primeiro passo do procedimento de estimação produz séries de tempo dos valores estimados para cada um dos K fatores; $\{\beta_{i,t}\}_{t=1}^T$, para $i = 1, \dots, K$. O próximo passo é estimar a dinâmica dos fatores da equação dos estados. Para cada especificação do modelo é estimado um modelo $AR(1)$ para cada fator, assumindo que as matrizes Φ e Q são diagonais. Também é estimado um modelo conjunto para a dinâmica dos fatores através de $VAR(1)$, assumindo que Φ e Q são matrizes completas.

A abordagem de estimação por dois passos, com parâmetro de decaimento determinado pelas regras apresentadas, (Almeida *et al.*, 2008), é usada para estimar as seguintes especificações do modelo: Nelson-

Siegel (com a formatação de Diebold-Li) e modelo de Svensson com quatro fatores Denotamos os modelos por $\text{NS-}R_i$ e $\text{SV-}R_i$, respectivamente, em que R_i denota a regra de escolha do λ empregada, com $i = 1, 2, 3, 4$.

6. Dados, ajuste e performance fora da amostra

6.1. Dados

A base de dados empregada aqui consiste das taxas diárias de fechamento dos contratos de DI-futuro negociados na BM&F. As maturidades constantes foram computadas através do método Cubic Splines. A tabela 1 resume algumas estatísticas descritivas da curva de juros para o período. Alguns fatos estilizados comuns à dados de curvas de juros estão claramente presentes: a curva média da amostra é positivamente inclinada e côncava, volatilidade é decrescente com a maturidade e as autocorrelações são altas. Outro ponto a destacar é que mesmo se tratando de um período amostral não muito longo percebe-se ampla variação entre as taxas mínimas e máximas para todas as maturidades, refletindo o comportamento da política monetária no período. As três últimas colunas trazem as autorrelações com defasagens de 1, 5 e 21 dias úteis, observa-se também que as taxas de juros para maturidades mais curtas exibem maior persistência para os três níveis de defasagens analisados, o que está de acordo com a literatura relacionada ao tema. a

Tabela 1: Estatísticas descritivas da curva de juros brasileira. Período Amostral 2007:01 - 2010:12.

Maturidade	τ	Média	Std. Dev.	Skew	Kurt	Min	Max	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(5)$	$\hat{\rho}(21)$
	1	10.80	1.64	8.51	14.13	0.169	1.957	0.999	0.996	0.967
	3	10.82	1.65	8.58	14.34	0.220	2.006	0.999	0.997	0.969
	6	10.88	1.67	8.59	14.52	0.264	2.071	0.999	0.997	0.968
	9	10.94	1.69	8.58	14.69	0.306	2.132	0.999	0.996	0.967
	12	11.09	1.72	8.61	15.32	0.386	2.241	0.999	0.995	0.961
	15	11.34	1.73	8.73	16.04	0.495	2.373	0.998	0.992	0.950
	18	11.60	1.72	8.99	16.40	0.572	2.461	0.998	0.989	0.938
Meses	21	11.85	1.68	9.35	16.92	0.655	2.565	0.997	0.986	0.925
	24	12.04	1.61	9.55	17.12	0.718	2.659	0.996	0.982	0.911
	27	12.21	1.55	9.79	17.26	0.805	2.815	0.995	0.979	0.894
	30	12.33	1.49	10.06	17.44	0.912	3.026	0.995	0.975	0.877
	33	12.43	1.45	10.27	17.62	1.005	3.290	0.994	0.972	0.859
	36	12.50	1.41	10.42	17.78	1.085	3.586	0.993	0.968	0.843
	39	12.60	1.32	10.71	17.83	1.281	4.180	0.992	0.961	0.814
	42	12.68	1.24	11.09	17.93	1.465	4.910	0.990	0.955	0.788

Nota: Apresentamos estatísticas descritivas das taxas de juros diárias para diferentes maturidades. A três últimas colunas contém autocorrelações com defasagem de um dia, uma semana e um mês, respectivamente.

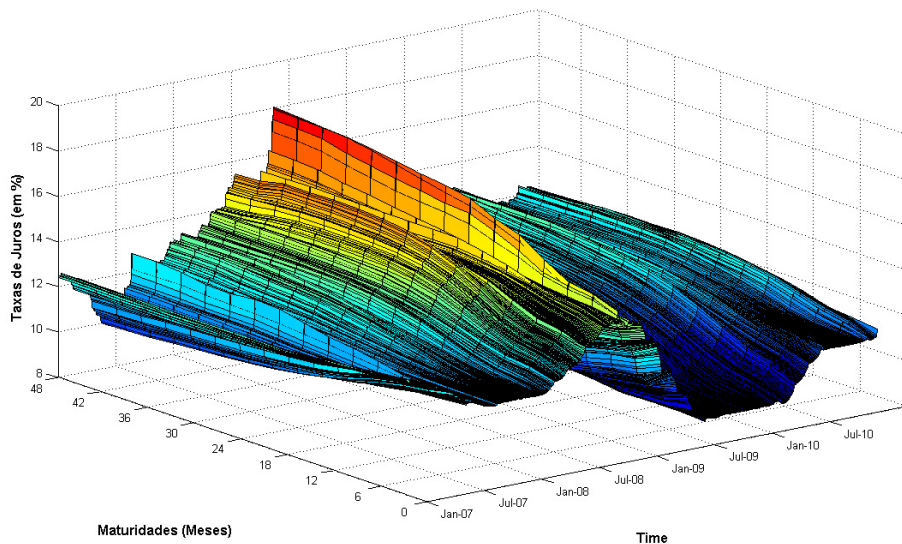
Como dito anteriormente, a contribuição do presente trabalho é fazer previsão um passo a frente a partir da estimação funcional não-paramétrica via kernel descrita na seção 3 acima. Nesse caso, cada dia constitui uma curva de juros, que, por sua vez, corresponde a uma observação ou realização, X_i , da variável aleatória \mathbf{X} em questão. A resposta ou variável dependente, Y_i , é a taxa de juros referente a última maturidade

considerada referente à curva i . No que diz respeito a estimação não-paramétrica, a semi-métrica escolhida foi a PCA (eq. 11) pois o conjunto de pontos para os quais observamos o valor da curva de juros é relativamente pequeno, qual seja, as quinze maturidades consideradas. O valor do parâmetro q da semi-métrica escolhido foi $q = 5$, por ser esse valor o que minimiza o erro quadrático médio empírico. A bandwidth foi selecionada automaticamente de acordo com a rotina de Ferraty & Vieu (2006). A função kernel assimétrica utilizada foi o kernel gaussiano assimétrico com suporte em $(0, +\infty)$. As estimativas foram feitas utilizando-se a função *funopare.knn.lcv* de Ferraty e Vieu disponível em <http://www.lsp.ups-tlse.fr/staph/npfda>.

Nós estimamos os modelos da classe Nelson-Siegel usando dados para o período amostral de 03:01:2007 a 30:12:2010 ($T = 750$ observações), são usadas 15 maturidades na estimação ($\tau = 1, 3, 4, 6, \dots, 30, 36, 42$ e 48 meses). O último ano da amostra é usado para análise das previsões fora da amostra.

A figura 1 mostra o gráfico das séries temporais para o conjunto de maturidades empregadas e ilustra como o nível da curva de juros e *spread* variam substancialmente ao longo do período amostral. Por exemplo, o último ano da amostra, usado para análise das previsões fora da amostra é caracterizado por elevação das taxas de juros, principalmente para as maturidades mais curtas, que respondem mais diretamente à política de elevação de juros implementada pelo Banco Central no primeiro semestre de 2010. Nota-se também que não apenas o nível da estrutura a termo flutua ao longo do tempo, mas também a inclinação e curvatura. A curvatura assume vários formatos, desde formas suaves à invertidas, tipo S.

Figura 1: **Dinâmica da Estrutura a Termo ao Longo do Tempo:** Este gráfico detalha a evolução da estrutura a termo da taxa de juros (Base de Dados de Futuros de DI) para o horizonte de tempo de 2007:01-2010:12.



Nota: A amostra é composta de dados diários para as maturidades de 1, 3, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 36, 42 e 48 meses.

Outra característica observada nos dados da curva de juros utilizados é a rejeição da hipótese nula de normalidade para toda a amostra, devido à assimetria positiva e excesso de curtose. Além disso, alguns fatos estilizados na literatura a respeito de curvas de juros são também observados, como o fato de que curvas de juros normalmente são positivamente inclinadas, as taxas de juros para as maturidades mais curtas são mais

voláteis e apresentam maior persistência.

6.2. Ajuste da Curva de juros

Nesta seção discutimos os resultados em termos de ajuste da estrutura a termo para o modelo estimado através de estimação não-paramétrica de dados funcionais (NP-FDA) e para os modelos paramétricos de Nelson-Siegel e Svensson, considerando as quatro regras de definição do parâmetro de decaimento discutidas. Para avaliar a qualidade do ajuste da curva de juros nós comparamos a raiz do erro quadrático médio (RMSE) entre as taxas ajustadas e observadas. Pode-se observar que em termos de ajuste a estimação por NP-FDA supera os modelos paramétricos em todas as maturidades analisadas. A figura 2 apresenta as curvas de juros observada e ajustada pelos métodos paramétricos e NP-FDA em diferentes períodos de tempo, nota-se que para todos os formatos de curvas; com inclinação positiva, inclinação negativa, formato de S (invertida), a estimação por NP-FDA supera os modelos paramétricos em termos de ajuste.

Tabela 2: RMSE do Ajuste para os Modelos Estimados. Período 2007:01 - 2010:12.

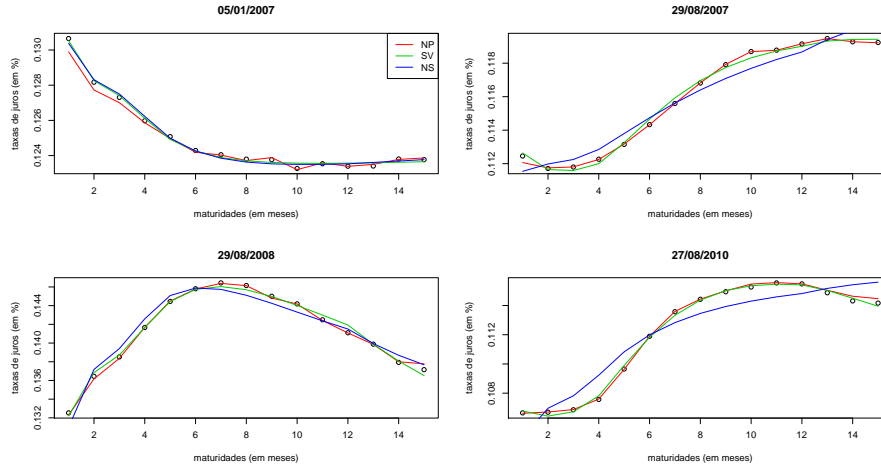
Maturidade	Meses	NS- R_1	NS- R_2	NS- R_3	NS- R_4	SV- R_1	SV- R_2	SV- R_3	SV- R_4	NP-FDA
Curto	1	0.1442	0.2003	0.1565	0.1569	0.0366	0.0387	0.0346	0.0381	0.0003
	3	0.0455	0.044	0.1433	0.1477	0.0401	0.0447	0.0426	0.0410	0.0003
	4	0.0804	0.068	0.1705	0.1737	0.0385	0.0428	0.0389	0.0399	0.0003
	6	0.1157	0.1306	0.1263	0.1254	0.0267	0.0273	0.0247	0.0272	0.0003
	9	0.0979	0.1442	0.0622	0.0649	0.0355	0.0396	0.0412	0.0355	0.0004
Médio	12	0.0504	0.1074	0.1337	0.1396	0.0422	0.0489	0.0462	0.0436	0.0004
	15	0.0493	0.0636	0.1745	0.1793	0.0371	0.0425	0.0355	0.0386	0.0005
	18	0.0798	0.0547	0.1751	0.1781	0.0284	0.0305	0.0257	0.0288	0.0005
	21	0.093	0.0806	0.1446	0.146	0.0296	0.0308	0.0325	0.0293	0.0004
	24	0.0854	0.0994	0.1032	0.1034	0.038	0.0414	0.0404	0.0386	0.0005
Longo	27	0.0695	0.0959	0.0698	0.0694	0.0364	0.0399	0.0375	0.0371	0.0005
	30	0.0538	0.0832	0.0457	0.0458	0.0345	0.0361	0.0359	0.0347	0.0005
	36	0.0374	0.0495	0.0871	0.0901	0.0359	0.0355	0.0358	0.0357	0.0005
	42	0.0694	0.0379	0.1835	0.1873	0.0241	0.0237	0.0261	0.0237	0.0005
	48	0.1132	0.1225	0.2444	0.2487	0.0366	0.0421	0.0397	0.0372	0.0005
	Média	0.0790	0.0921	0.1347	0.1371	0.0347	0.0376	0.0358	0.0353	0.0004
	Mediana	0.0798	0.0832	0.1433	0.1460	0.0364	0.0396	0.0359	0.0371	0.0005

Nota: A última linha traz o número de vezes em que a parametrização superou as demais. Negrito indica melhor performance na maturidade. RMSE expresso em *basis points*.

6.3. Performance em Previsões fora da amostra

Nesta seção nós examinamos a performance dos modelos da classe Nelson-Siegel quanto á previsão. Dividimos a base de dados em um período inicial de estimação, o qual vai de 03:01:2007 a 30:12:2009 (504 observações) e um período de previsão, que compreende o restante da amostra; 03:01:2010 a 30:12:2010 (252 observações). No caso do procedimento de estimação em dois estágios, em que são empregadas as regras para otimização do parâmetro de decaimento, λ , o conjunto de dados é dividido em três sub-amostras. Inicialmente, os dados referentes ao período de estimação são divididos em duas partes, a primeira composta por 350 observações diárias e a segunda com 154 observações, que é usada para otimização do λ em simulações de

Figura 2: Curva de Juros Observada e Ajustada em Diferentes Pontos no Tempo.



Nota: Apresentados a curva de juros observada e ajustada por NP-FDA (NP) e modelos paramétricos de Nelson-Siegel (NS) e Svensson (SV) em diferentes pontos do tempo.

previsões fora da amostra empregando as quatro regras apresentadas. Nós estimamos recursivamente todos os modelos expandindo a janela dos dados a cada nova observação.

A abordagem para fazer previsão da curva de juros com os modelos da classe Nelson-Siegel consiste em fazer previsões dos fatores, e então usar os fatores previstos para ajustar previsões da curva de juros. As previsões no tempo t , para $t + h$, da taxa de juros com maturidade τ , são dadas por⁵:

$$\hat{y}_{t+h|t}(\tau) = \hat{\beta}_{1,t+h|t} + \hat{\beta}_{2,t+h|t} \left(\frac{1 - e^{-\hat{\lambda}\tau}}{\hat{\lambda}\tau} \right) + \hat{\beta}_{3,t+h|t} \left(\frac{1 - e^{-\hat{\lambda}\tau}}{\hat{\lambda}\tau} - e^{-\hat{\lambda}\tau} \right).$$

As previsões dos fatores são obtidas usando os parâmetros estimados da equação de transição (19):

$$\hat{\beta}_{t+h|t} = \hat{\mu} + \hat{\Phi} \cdot \hat{\beta}_t.$$

Na tabela 3 apresentamos o RMSE para as previsões um passo à frente para o modelo estimado por estimação não-paramétrica de dados funcionais (NP-FDA), bem como para as previsões geradas através do modelo de Nelson-Siegel e modelo de Svensson, considerando as quatro regras alternativas para definição do parâmetro λ discutidas. Nota-se que, para previsões um dia à frente, o modelo estimado por NP-FDA obtém melhores resultados que as demais alternativas em 10 das 15 maturidades analisadas. Com destaque para a parte mais longa da curva de juros, maturidades acima de 24 meses, em que supera as demais em todas as maturidades. Pode-se observar também que para as maturidades mais curtas e intermediárias o modelo de Svensson (1994) apresenta bom desempenho.

⁵No caso dos modelos com quatro fatores o procedimento é o mesmo.

Tabela 3: RMSE dos Modelos Estimados para Previsão um Passo à Frente. Período 2010:01 - 2010:12.

Maturidade	Meses	NS- R_1	NS- R_2	NS- R_3	NS- R_4	SV- R_1	SV- R_2	SV- R_3	SV- R_4	NP-FDA
Curto	1	0.1703	0.1679	0.0774	0.0771	0.0570	0.0578	0.0581	0.0566	0.0851
	3	0.0633	0.0599	0.0738	0.0761	0.0603	0.0596	0.0624	0.0593	0.0667
	4	0.0976	0.0926	0.0793	0.0810	0.0719	0.0694	0.0734	0.0698	0.0656
	6	0.1289	0.1289	0.0909	0.0908	0.0826	0.0815	0.0827	0.0813	0.0731
	9	0.1141	0.1132	0.0877	0.0880	0.0823	0.0828	0.0835	0.0825	0.0807
Médio	12	0.0846	0.0888	0.0833	0.0842	0.0819	0.0818	0.0830	0.0819	0.0871
	15	0.0940	0.0884	0.0959	0.0960	0.0835	0.0838	0.0834	0.0834	0.0882
	18	0.1204	0.1016	0.1182	0.1179	0.0891	0.0897	0.0888	0.0893	0.0896
	21	0.1315	0.1104	0.1287	0.1284	0.0914	0.0918	0.0918	0.0914	0.0861
	24	0.1273	0.1083	0.1264	0.1262	0.0961	0.0955	0.0965	0.0954	0.0853
Longo	27	0.1231	0.1059	0.1183	0.1182	0.0981	0.0970	0.0992	0.0973	0.0870
	30	0.1133	0.1127	0.1079	0.1081	0.1005	0.1007	0.1014	0.1006	0.0901
	36	0.1098	0.1164	0.1126	0.1125	0.1081	0.1093	0.1073	0.1087	0.0955
	42	0.1386	0.1194	0.1467	0.1464	0.1141	0.1144	0.1151	0.1143	0.0984
	48	0.1696	0.1352	0.1773	0.1767	0.1199	0.1201	0.1214	0.1199	0.1017
	Média	0.1191	0.1100	0.1083	0.1085	0.0891	0.0890	0.0899	0.0888	0.0854
	Mediana	0.1204	0.1104	0.1079	0.1081	0.0891	0.0897	0.0888	0.0893	0.0870
	# Menor						1	1	3	10

Nota: A última linha traz o número de vezes em que a parametrização superou as demais. Negrito indica melhor performance na maturidade. RMSE expresso em basis points.

7. Conclusão

Neste trabalho introduzimos uma nova forma de estimar e prever a curva de juros zero-cupom. A contribuição do trabalho consiste em usar estimação não paramétrica de dados funcionais, via método kernel, para fazer previsão um passo a frente para a curva de juros. As previsões foram comparadas com métodos paramétricos amplamente usados na literatura. O método de estimação proposto obteve performance preditiva superior aos seus concorrentes em dez das quinze maturidades consideradas, sendo que para previsões um dia à frente o modelo estimado por NP-FDA superou os demais competidores em todas as maturidades da parte mais longa da curva de juros. Também comparamos a performance dos modelos estimados em relação ao ajuste da curva de juros. Nessa comparação o estimador NP-FDA superou seus concorrentes em todas as maturidades consideradas.

O próximo passo é ampliar o horizonte de previsão e comparar os resultados entre NP-FDA e os principais modelos paramétricos presentes na literatura.

Referências

- ALMEIDA, CAIO, GOMES, ROMEU, LEITE, ANDRÉ, & VICENTE, JOSÉ. 2008. Movimentos da Estrutura a Termo e Critérios de Minimização do Erro de Previsão em um Modelo Paramétrico Exponencial. *Revista Brasileira de Economia*, **62**(4), 497–510.
- BJORK, T., & CHRISTENSEN, B.J. 1999. Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves. *Mathematical Finance*, **9**, 323–348.

- BLACK, FISHER, & KARASINSKI, P. 1991. Bond and Option Pricing when Short Rates Are Lognormal. *Financial Analysts Journal*, **46**, 52–59.
- CALDEIRA, JOÃO F., MOURA, GUILHERME V., & PORTUGAL, MARCELO S. 2010. Efficient Yield Curve Estimation and Forecasting in Brazil. *Economia*, **11**(1), 27–51.
- CHRISTENSEN, JENS H. E., DIEBOLD, FRANCIS X., & RUDEBUSCH, GLENN D. 2009. An arbitrage-free generalized Nelson-Siegel term structure model. *Econometrics Journal*, **12**, 33–64.
- CHRISTENSEN, JENS H.E., DIEBOLD, FRANCIS X., & RUDEBUSCH, GLENN D. 2007. *The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models*. Tech. rept.
- COX, JOHN C, INGERSOLL, JONATHAN E, JR, & ROSS, STEPHEN A. 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**(2), 385–407.
- DAI, QIANG, & SINGLETON, KENNETH J. 2002. Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure. *Journal of Financial Economics*, **63**(3), 415–441.
- DIEBOLD, FRANCIS X., & LI, CANLIN. 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, **130**(2), 337–364.
- DIEBOLD, FRANCIS X., PIAZZESI, MONIKA, & RUDEBUSCH, GLENN D. 2005. Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics. *American Economic Review*, **95**(2), 415–420.
- DIEBOLD, FRANCIS X., RUDEBUSCH, GLENN D., & BORAG[CARON]AN ARUOBA, S. 2006a. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of Econometrics*, **131**(1-2), 309–338.
- DIEBOLD, FRANCIS X., JI, LEI, & LI, CANLIN. 2006b (Mar.). *A Three-Factor Yield Curve Model: Non-Affine Structure, Systematic Risk Sources, and Generalized Duration*. PIER Working Paper Archive 06-017. Penn Institute for Economic Research, Department of Economics, University of Pennsylvania.
- DUFFIE, D., & KAN, R. 1996. A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance*, **6**(4), 379–406.
- FABOZZI, FRANK J., MARTELLINI, LIONEL, & PRIAULET, PHILIPPE. 2005. Predictability in the Shape of the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Fixed Income*, **15**, 40–53.
- FAMA, EUGENE F, & BLISS, ROBERT R. 1987. The Information in Long-Maturity Forward Rates. *American Economic Review*, **77**(4), 680–92.
- FERRATY, F., & VIEU, P. 2006. *Nonparametric functional data analysis: theory and practice*. 1st edn.
- FERRATY, F., RABHI A., & P., VIEU. 2005. Conditional Quantiles for Dependent Functional Data with Application to the Climatic El Niño Phenomenon. *The Indian Journal of Statistics*, **67**, 378–398.
- FILIPOVIC, DAMIR. 2009. *Term-Structure Models: A Graduate Course*. Springer Finance.
- FISHER, MARK, NYCHKA, DOUGLAS W., & ZERVOS, DAVID. 1995 (Oct.). *Fitting The Term Structure of Interest Rates With Smoothing Splines*. Finance and Economics Discussion Series 95-1. Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).

- HAGAN, P., & WEST, G. 2005. Interpolation schemes for curve construction. *Applied Mathematical Finance*.
- HAMILTON, JAMES D. 1994. *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.
- HO, TSY, & LEE, S.B. 1986. Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims. *The Journal of Finance*, **41**, 1011–1029.
- HULL, JOHN, & WHITE, A. 1990. Valuating Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **25**, 87–100.
- LAURINI, MÁRCIO P., & HOTTA, LUIZ K. 2010. Bayesian extensions to diebold-li term structure model. *International Review of Financial Analysis*, **19**, 342–350.
- MCCULLOCH, J HUSTON. 1971. Measuring the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Business*, **44**(1), 19–31.
- MCCULLOCH, J HUSTON. 1975. The Tax-Adjusted Yield Curve. *Journal of Finance*, **30**(3), 811–30.
- MÖNCH, EMANUEL. 2008. Forecasting the yield curve in a data-rich environment: a no-arbitrage factor-augmented VAR approach. *Journal of Econometrics*, **146**(1), 26–43.
- NELSON, CHARLES R., & SIEGEL, ANDREW F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, **60**(4), 473–489.
- POOTER, MICHEL DE. 2007 (June). *Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models*. Tinbergen Institute Discussion Papers 07-043/4. Tinbergen Institute.
- RAMSAY, J.O., & SILVERMAN, B.W. 1997. *Functional Data Analysis*. 1st edn.
- SVENSSON, LARS E. O. 1994 (Sept.). *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*. IMF Working Papers 94/114. International Monetary Fund.
- UHLENBECK, G., & ORNSTEIN, L. 1930. On the Theory of Brownian Motion. *Physical Review*, **36**, 823–841.
- VASICEK, OLDRICH. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, **5**(2), 177–188.