

Dependência entre o Real e o Peso Chileno usando cópulas com mudanças de regime

Rodrigo de Sá*

Resumo

Neste trabalho, utilizando cópulas, estimamos a dinâmica da dependência entre a taxa de câmbio do Brasil e a do Chile durante 2003 e 2009. Usamos a cópula Joe-Clayton simetrizada que permite que os parâmetros de dependência caudal superior e inferior sejam diferentes. Ainda permitimos que estes parâmetros de dependência mudem ao longo do tempo, tanto deterministicamente quanto segundo um processo de mudança de regimes Markoviano de primeira ordem. As distribuições marginais da taxa de câmbio foram estimadas a partir de um GARCH com distribuição skewed-t, que permite assimetrias. Os desvios padrão dos estimadores foram calculados através de bootstrap. Notamos que a dinâmica de dependência entre as cotações do Real-Dólar e Peso Chileno-Dólar apresentam uma alta dependência, com períodos curtos de uma dependência menor.

Abstract

In this work, using copulas, we estimate the dynamics of dependence between the exchange rate of Brazil and Chile from 2003 to 2009. We use the symmetrized Joe-Clayton copula that allows the parameters of upper and lower tail dependence be different. Also we allow those dependence parameters change over time, both deterministicly as a Markovian first-order change of regime process. The marginal distributions of the exchange rates were estimated from a GARCH with skewed-t distribution, which allows asymmetries. The standard deviations of the estimators were calculated using bootstrap. We note that the dynamics of dependency between the Real-Dollar and Chilean Peso-Dollar and have a high dependency, with short periods of a minor dependency.

1 Introdução

A taxa de câmbio é um preço determinado no mercado de importação e exportações de bens e serviços e também no mercado financeiro de divisas. A importância de se estudá-la vem diretamente do papel central destes dois mercados citados, com o enorme fluxo de capitais neste e determinando os preços de todos os produtos importados pelos consumidores brasileiros e pelas nossas empresas, além do preço das nossas exportações, naquele.

Dada a crescente integração entre os países, espera-se que as taxas de câmbio tornem-se mais dependentes uma das outras. Um modo de se modelar a dependência entre duas mais variáveis é através das funções cópulas. Este tipo

*Mestrando em Economia do PPGE/UFRGS e pesquisador em Economia da FEE.

de função permite modelar a distribuição conjunta entre duas ou mais variáveis aleatórias como uma função das suas marginais, e esta função é a cópula. A vantagem deste método é a maior facilidade em relação a tentar-se modelar diretamente uma função distribuição conjunta.

Esta abordagem tem sido bastante usada para modelar ativos financeiros. Busca-se assim tentar explicar alguns fatos estilizados deste mercado, como a distribuição conjunta não ser normal e os ativos apresentarem uma estrutura de dependência assimétrica, mais dependente quando os mercados estão em queda do que quando estão em alta. Isto pode ser sintetizado através das cópulas com os parâmetros de dependência caudal inferior e superior, respectivamente. Já a aplicação desta literatura para a modelagem das taxas de câmbio é mais recente, como, por exemplo, Patton [5].

Quanto à modelagem das distribuições marginais existem diversas opções. Uma alternativa amplamente utilizada é modelar as marginais como processos da família GARCH. Além disso, existe uma literatura que tem estimado tanto as marginais como os parâmetros da função cópula permitindo mudanças de regime Markoviano. Ainda, há uma grande variedade de cópulas, com algumas características específicas, como o comportamento dos parâmetros de dependência caudal, usadas conforme as características dos dados.

Inserido neste contexto, neste trabalho buscamos modelar a dependência entre as taxas de câmbio Real-Dólar e Peso Chileno-Dólar usando uma função cópula com os parâmetros permitidos a exibirem mudança de regime e as marginais modeladas como um GARCH(1,1). O período estimado foi entre 2003 e 2009. A cópula utilizada é a Joe-Clayton simetrizada, que permite que os parâmetros de dependência inferior e superior sejam diferentes.

Primeiramente buscamos estimar os pares da moeda brasileira com todas as outras do Mercosul. Porém, dada a grande intervenção dos bancos centrais de Argentina, Paraguai e Uruguai em suas respectivas taxas de câmbio, não conseguimos ajustar um modelo da família GARCH a elas.

Este artigo está dividido, além desta introdução, em mais cinco seções. Na segunda são apresentadas as cópulas e na terceira como a partir dela pode-se chegar à verossimilhança, além do modelo das marginais e de mudança de regime. Na seção 4 são mostrados os dados, a estimação e os resultados. A última seção traz uma breve conclusão.

2 Cópulas

Como dito anteriormente, cópulas são funções que permitem chegar à função de probabilidade acumulada de duas ou mais variáveis aleatórias a partir de suas marginais. A existência dessa função cópula é dada pelo Teorema de Sklar.

Teorema 1. (Teorema de Sklar) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e F_{XY} sua função de distribuição acumulada conjunta com marginais F_X e F_Y . Então existe uma cópula C tal que, para todos x, y em $\bar{\mathbf{R}}^1$,

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \quad (1)$$

Se F_X e F_Y são contínuas, então C é única; caso contrário, C é unicamente determinada no espaço gerado por $F_X \times F_Y$. Ainda, se C é uma cópula e F_X e

¹ $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ é a reta real expandida.

F_Y são funções distribuição de probabilidade, então a função F_{XY} definida por (1) é uma função de distribuição conjunta com marginais F_X e F_Y .

Demonstração. Ver [4, p. 18]. \square

O teorema anterior é dado em termos das funções de distribuição, mas pode ser apresentado também em relação às densidades das variáveis aleatórias. Derivando (1) em relação a X e a Y chega-se a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial X} &= \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_x(x)} \frac{\partial F_X(x)}{\partial X} \\ \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial X \partial Y} &= \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_x(x) \partial F_y(y)} \frac{\partial F_X(x)}{\partial X} \frac{\partial F_Y(y)}{\partial Y} \\ f_{XY}(x,y) &= c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y)\end{aligned}\quad (2)$$

Na última linha de (2), f_{XY} é a densidade conjunta e f_X e f_Y são as densidades marginais.

Esta abordagem pode ser estendida a distribuições condicionais, que é o que será usada aqui. Para maior detalhes, ver, por exemplo, Patton [5, seção 2].

2.1 Cópula Joe-Clayton simetrizada

Um importante aspecto na literatura de cópulas e o objetivo deste trabalho é fazer inferência sobre a estrutura de dependência caudal das variáveis. Informalmente, a dependência caudal superior mede a probabilidade de duas variáveis aleatórias apresentarem valores altos simultaneamente e a inferior a probabilidade de exibirem simultaneamente valores baixos. A definição a seguir formaliza esta assertiva.

Definição 1. Se o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(U \leq \epsilon | V \leq \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(V \leq \epsilon | U \leq \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C(\epsilon, \epsilon)}{\epsilon} = \tau^L$$

existe, então a cópula C exibe *dependência caudal inferior* se $\tau^L \in (0, 1]$ ou não exibe dependência caudal inferior se $\tau^L = 0$. Analogamente, se o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \mathbb{P}(U > \delta | V > \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 1} \mathbb{P}(V > \delta | U > \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 1} \frac{1 - 2\delta + C(\delta, \delta)}{1 - \delta} = \tau^U$$

existe, então a cópula C exibe *dependência caudal superior* se $\tau^U \in (0, 1]$ ou não exibe se $\tau^U = 0$.

Aqui utilizamos, como dito anteriormente, a cópula Joe-Clayton simetrizada pois ela permite que estes parâmetros de dependência inferior e superior sejam diferentes. Além disso, o caso simétrico, onde estes são iguais, é um caso particular desta função cópula. Esta pode ser definida como segue.

Definição 2. A cópula *Joe-Clayton simetrizada*, C_{SJC} , é a função

$$C_{SJC}(u, v | \tau^U, \tau^L) = \frac{1}{2} \left(C_{JC}(u, v | \tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1-u, 1-v | \tau^L, \tau^U) + u + v - 1 \right),$$

sendo que C_{JC} é a cópula Joe-Clayton dada por

$$C_{JC}(u, v | \tau^U, \tau^L) = 1 - \left(1 - \left\{ [1 - (1-u)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1-v)^\kappa]^{-\gamma} - 1 \right\}^{-1/\gamma} \right)^{1/\kappa},$$

onde $\kappa = 1/\log_2(2 - \tau^U)$ e $\gamma = -1/\log_2(\tau^L)$.

Vale ressaltar que na cópula Joe-Clayton (não simetrizada), mesmo quando os parâmetros de dependência caudal inferior e superior são iguais, a cópula ainda apresenta assimetria.

3 Método de Estimação

Como a função cópula dá a distribuição conjunta dos dados, a função de verossimilhança pode ser escrita por meio desta. Assim, a função de verossimilhança a ser maximizada é

$$\ell(\theta|X) = \sum_{t=1}^T \log \left(c(F_1(x_{1t}|\theta_1), F_2(x_{2t}|\theta_2) | \theta_{ct}, S_t) \prod_{i=1}^2 f_i(x_{it}|\theta_i) \right), \quad (3)$$

onde x são os dados e θ os parâmetros.

A equação (3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \ell(\theta|X) &= \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_{1t}|\theta_1), F_2(x_{2t}|\theta_2) | \theta_{ct}, S_t) \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \log f_1(x_{1t}|\theta_1) + \sum_{t=1}^T \log f_2(x_{2t}|\theta_2) \\ \ell(\theta|X) &= \ell_c(\theta_{ct}, S_t) + \ell_{f_1}(\theta_1) + \ell_{f_2}(\theta_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Neste trabalho fizemos a maximização da equação (4) separadamente, como em da Silva Filho e Ziegelmann [1]. Os dois últimos termos da equação são as verossimilhanças dos GARCH's de cada uma das taxas de câmbio, que foram estimadas primeiro. Os parâmetros estimados nesta fase foram usados como argumento para a maximização do primeiro termo da equação, referente à cópula, dada por

$$\max \sum_{t=1}^T \log \left(\sum_{S_t=0}^1 c(u_{1,t}, u_{2,t} | \tau_{S_t}^U, \tau_{S_t}^L) \mathbb{P}(S_t | I_{t-1}) \right). \quad (5)$$

Na equação (5) tem-se a função de distribuição de cada uma das divisas, u_1 e u_2 , e a probabilidade de transição dos estados, $\mathbb{P}(S_t|I_{t-1})$. A estimação destas variáveis é explicada nas duas próximas subseções.

3.1 Marginais

Como frisado anteriormente, modelamos as marginais referentes a cada uma das taxas de câmbio como um GARCH(1,1). Ainda, utilizamos para os erros uma distribuição *skewed-t*, que permite a presença de assimetrias já nas marginais. Assim, o log-retorno da taxa de câmbio, já diminuído da sua respectiva média, $x_{it} = \ln E_t - \ln E_{t-1} - \bar{x}_i$, pode ser descrita por as seguintes equações,

$$\begin{aligned} x_{it} &= h_{it}^{1/2} \epsilon_{it} \\ h_{it} &= \omega_i + \beta_i h_{it-1} + \alpha_i \epsilon_{it-1}^2, \end{aligned}$$

onde h_{it} é a variância condicional de x_{it} dado o conjunto de informação de t e ϵ_{it} é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída com $\epsilon_{it} \sim \text{skewed-t}(\nu_i, \lambda_i)$, onde ν_i são os graus de liberdade e λ_i é a assimetria. Desse modo, a taxa de câmbio apresenta uma também uma distribuição *skewed-t*, $u_{i,t} = F_i(x_{it}|h_{it}) = \text{skewed-t}(x_{it}h_{it}^{-1/2})$.

3.2 Regimes não observados

Para a maximização de (5) é necessário que se conheça a probabilidade de cada estado, $\mathbb{P}(S_t = k|I_{t-1})$, $k = 0, 1$, $t = 1, \dots, T$. Nesta parte do trabalho mostramos o algoritmo apresentado em Kim e Nelson [3, capítulo 4] para esta estimação.

É assumido existirem apenas dois regimes e que as mudanças entre estes regimes sigam um processo Markoviano de primeira ordem. As probabilidades de transição são dadas por $\mathbb{P}(S_t = 1|S_{t-1} = 1) = p$ e $\mathbb{P}(S_t = 0|S_{t-1} = 0) = q$. O filtro pode ser implementado como segue.

- Passo 1: Inicia-se a recursão com $\mathbb{P}(S_0 = k|I_0)$, $k = 0, 1$. Uma possibilidade é utilizar as probabilidades estacionárias da cadeia de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_0 = 0|I_0) &= \pi_0 = \frac{1-p}{2-p-q} \\ \mathbb{P}(S_0 = 1|I_0) &= \pi_1 = \frac{1-q}{2-p-q}. \end{aligned}$$

- Passo 2: Dadas $\mathbb{P}(S_{t-1} = k|I_{t-1})$, $k = 0, 1$, as probabilidades $\mathbb{P}(S_t = k|I_{t-1})$, $k = 0, 1$ podem ser calculadas como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t = k|I_{t-1}) &= \sum_{i=0}^1 \mathbb{P}(S_t = k, S_{t-1} = i|I_{t-1}) \\ &= \sum_{i=0}^1 \mathbb{P}(S_t = k|S_{t-1} = i) \mathbb{P}(S_{t-1} = i|I_{t-1}), \end{aligned}$$

para $k = 0, 1$. Note que $\mathbb{P}(S_{t-1} = i | I_{t-1})$, $i = 0, 1$ são dadas pelo próprio algoritmo (próximo passo) e $\mathbb{P}(S_t = k | S_{t-1} = i)$, $k = 0, 1$, $i = 0, 1$ são as probabilidades de transição, que são parâmetros a serem estimados no processo de maximização.²

- Passo 3: Uma vez que o processo tenha se realizado no instante t , as probabilidades podem ser atualizadas através de

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t = k | I_t) &= \mathbb{P}(S_t = k | I_{t-1}, u_{1,t}, u_{2,t}) \\ &= \frac{f(S_t = k, u_{1,t}, u_{2,t} | I_{t-1})}{c(u_{1,t}, u_{2,t} | I_{t-1})} \\ &= \frac{c(u_{1,t}, u_{2,t} | S_t = k, I_{t-1}) \mathbb{P}(S_t = k | I_{t-1})}{\sum_{j=0}^1 c(u_{1,t}, u_{2,t} | S_t = j, I_{t-1}) \mathbb{P}(S_t = j | I_{t-1})}, \end{aligned}$$

onde $I_t = \{I_{t-1}, u_{1,t}, u_{2,t}\}$ e $k = 0, 1$.³

Os passos 2 e 3 devem ser executados alternadamente, para $t = 1, \dots, T$, até que se tenha as probabilidades para todos os instantes.

Kim (ver [3, p. 68] e [1, p. 51]) ainda propôs um algoritmo de suavização que usa toda a série para o cálculo das probabilidades de transição, dada por

$$\mathbb{P}(S_t = l | I_T) = \sum_{k=0}^1 \frac{\mathbb{P}(S_{t+1} = k | S_t = l, I_t) \mathbb{P}(S_t = l | I_t) \mathbb{P}(S_{t+1} = k | I_T)}{\sum_{j=0}^1 \mathbb{P}(S_{t+1} = k | S_t = j, I_t) \mathbb{P}(S_t = j | I_t)}.$$

3.3 Dependência caudal

Os estados não observados afetam a função cópula através das dependências caudais inferior e superior. Em Patton [5] e da Silva Filho e Ziegelmann [1] os parâmetros de dependência seguem um ARMA(1,10) restrito (para que se mantenham entre zero e um). Neste último ainda é permitido que a média de ARMA mude conforme o estado não observável da natureza.

Neste trabalho modelamos estes parâmetros como um MA(10)⁴ restrito com mudança de regime no intercepto,

$$\tau^N = \Lambda \left(\omega_{N,0} (1 - S_t) + (\omega_{N,0} + \omega_{N,1}) S_t + \alpha_N \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \right), \quad N = L, U,$$

onde $\Lambda(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ é a transformação logística. Para evitar problemas de identificação do modelo quanto qual regime significa alta dependência e qual baixa, a estimação se dá sob as restrições

²Na primeira linha tem-se que a probabilidade marginal de S_t é a conjunta de S_t e S_{t-1} integrada em relação a esta última e, na segunda, a conjunta é decomposta na condicional vezes a marginal.

³Na derivação das equações deste passo foram utilizados os mesmos argumentos do que no anterior e o fato de a cópula ser a função de distribuição conjunta de u_1 e u_2 .

⁴Não os modelamos com o componente AR por uma questão de limitação computacional, pois caso ele estivesse presente a função que calcula a cópula teria que ser chamada a cada t ; sem ele esta função pode ser chamada uma única vez, o que reduziu significativamente o tempo computacional.

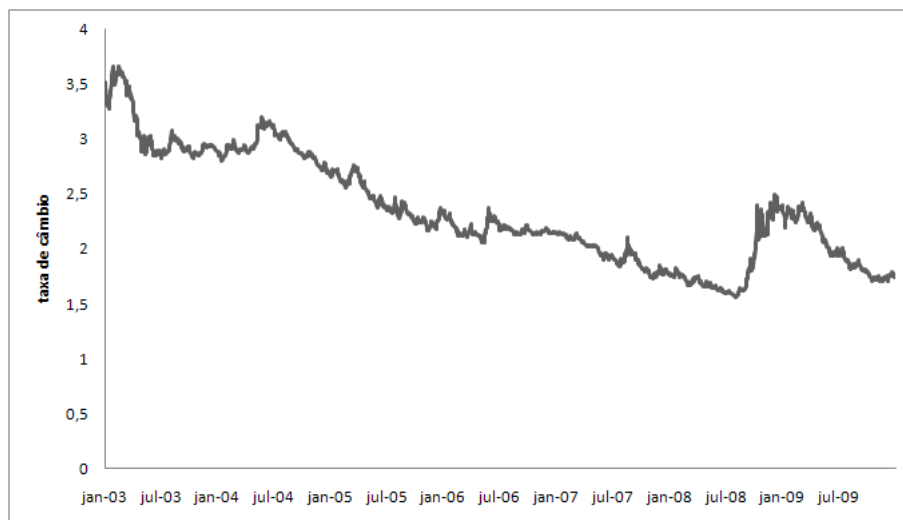


Figura 1: Taxa de câmbio Real-Dólar

$$\begin{aligned}\omega_{U,1} &\geq 0 \\ \omega_{L,1} &\leq 0.\end{aligned}$$

Assim, o estado 1 apresentará uma maior dependência caudal.

4 Estimação e Resultados

Foram utilizadas as taxas de câmbio Real-Dólar e Peso Chileno-Dólar entre 2003 e 2009, com periodicidade mensal.

Os gráficos (1) e (2) mostram o nível das taxas de câmbio utilizadas. Os retornos em termos logaritmos dos mesmos estão nos gráficos (3) e (4).

O *software* utilizado para a estimação foi o MATLAB. Criamos uma rotina que calcula o valor da verossimilhança da cópula, já com o filtro da mudança de regime. Dentro deste algoritmo usamos o código do Patton para o cálculo da cópula e da distribuição *skewed-t*; os GARCH's foram rodados com a rotina desenvolvida por Kevin Sheppard, pertencente ao MFE Toolbox.

A maximização da rotina criada foi feita a partir do algoritmo *fmincon* presente no MATLAB. No entanto, a otimização se mostrou problemática, com vários ótimos locais. Para minimizar este problema, a maximização foi feita partindo de cem valores iniciais aleatórios.⁵

Para o cálculo da variância dos estimadores usamos o método de *bootstrap* circular (ver, por exemplo, [2, p. 397]). Usamos cem reamostragens, e em cada

⁵Dentre os máximos obtidos nessas cem maximizações, os com maiores valores da verossimilhança foram usados novamente como valores iniciais e a maximização foi feita com uma tolerância menor (10^{-8}) contra (10^{-6}) na primeira rodada. Neste último estágio os máximos não se alteraram.

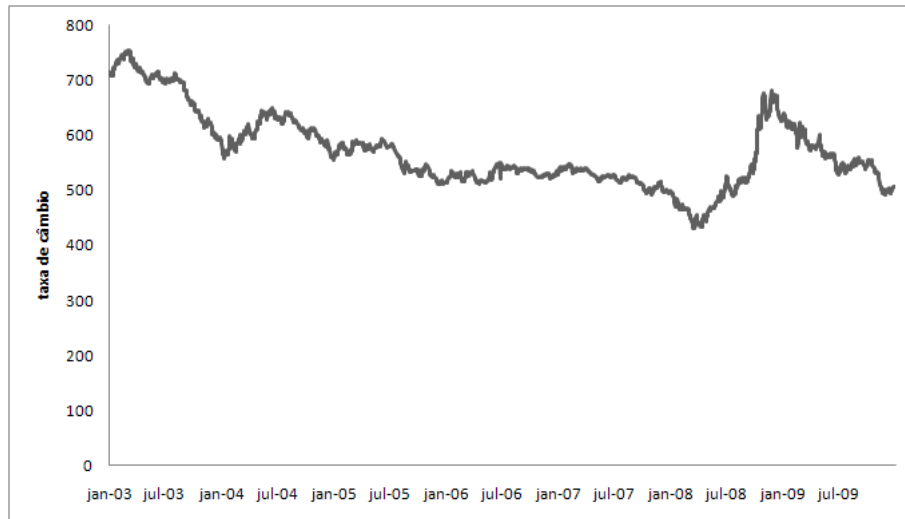


Figura 2: Taxa de câmbio Peso Chileno-Dólar

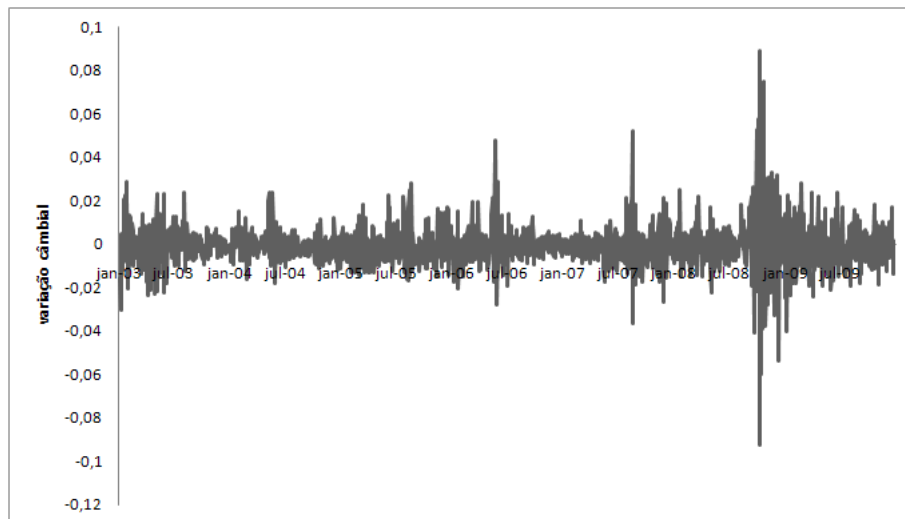


Figura 3: Retorno do Real

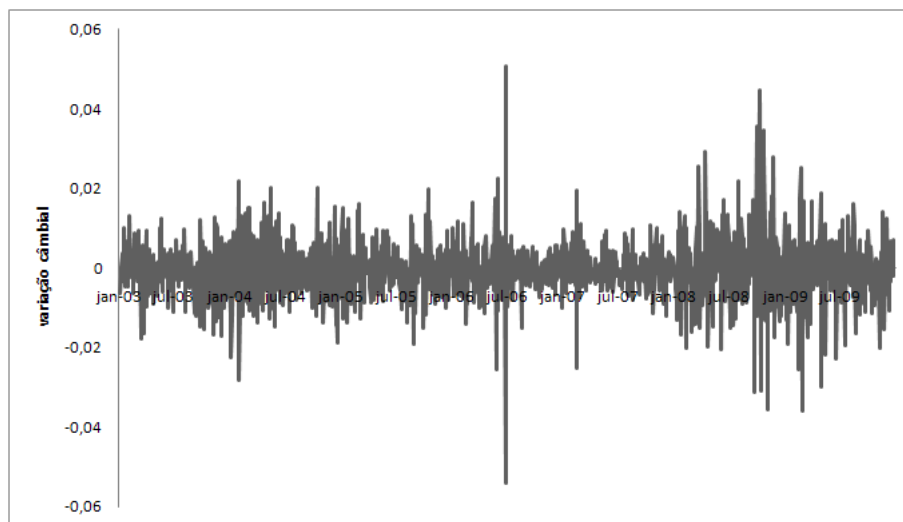


Figura 4: Retorno do Peso Chileno

| parâmetro | Real-Dólar | Peso Chileno-Dólar |
|-----------|-------------------------|-------------------------|
| ω | 1.1504×10^{-6} | 1.6464×10^{-6} |
| α | 0.1485 | 0.1415 |
| β | 0.8431 | 0.8384 |
| ν | 12.1465 | 4.9494 |
| λ | 0.1556 | 0.0074 |

Tabela 1: Parâmetros estimados das distribuições marginais

uma das amostragens usamos cinco valores iniciais válidos.⁶

Os resultados das marginais são dados na tabela (1). Nela pode se ver que ambas apresentam uma assimetria a direita, maior na divisa brasileira.

A tabela (2) apresenta as estimativas dos parâmetros da cópula, e seus desvios padrão e estatísticas-t obtidos pelo *bootstrap*. Nela pode-se ver que a probabilidade de a economia se manter no estado de menor dependência é extremamente alta (0.9740); e a de se manter no estado de maior dependência também é alta (0.7232).

Apesar disso, durante grande parte do período a probabilidade estimada de se estar no estado um, de maior dependência, foi mais alta do que a probabilidade de se estar no estado zero. Isto pode ser visto no gráfico (5). Os gráficos (6) e (7) mostram a dinâmica das dependências caudais inferior e superior.

5 Conclusão

A partir da estimação feita neste trabalho, podemos ver que a dinâmica de dependência entre as cotações do Real-Dólar e Peso Chileno-Dólar apresentam

⁶Valores iniciais válidos são aqueles nos quais a verossimilhança avaliada nestes pontos é um número real finito. No bootstrap ficamos com 54 replicações, dado que vários tinham valores problemáticos devido às dificuldades da otimização.

| Parâmetro | Valor estimado | Desvio padrão | Estatística-t |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| p | 0.9740 | 0.078 | 12.3503 |
| q | 0.7232 | 0.0960 | 3.3985 |
| $\omega_{U,0}$ | -7.4853 | 3.2910 | -1.6640 |
| $\omega_{U,1}$ | 6.3531 | 3.1465 | 1.4521 |
| α_U | 0.8694 | 0.1797 | 1.3114 |
| $\omega_{L,0}$ | 2.3714 | 0.5740 | 2.7671 |
| $\omega_{L,1}$ | -3.9340 | 0.6652 | -5.5770 |
| α_L | -4.0208 | 5.5965 | -0.7016 |

Tabela 2: Parâmetros estimados da cópula

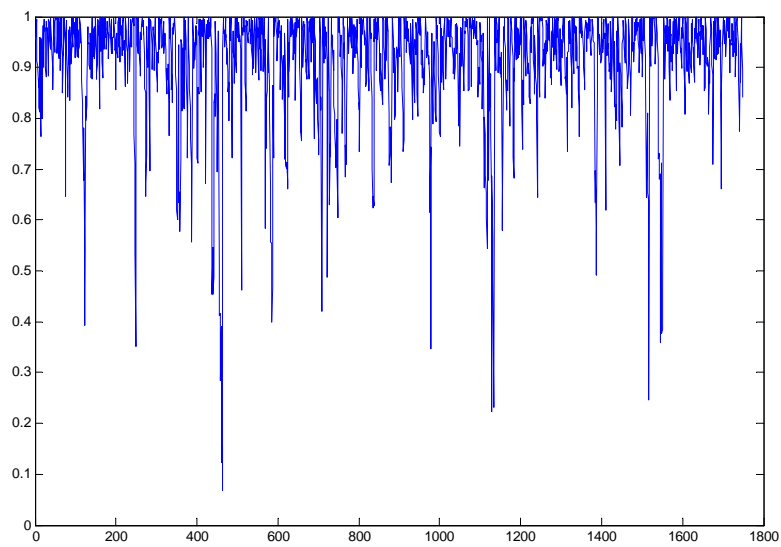


Figura 5: Probabilidade suavizada para o regime de alta dependência

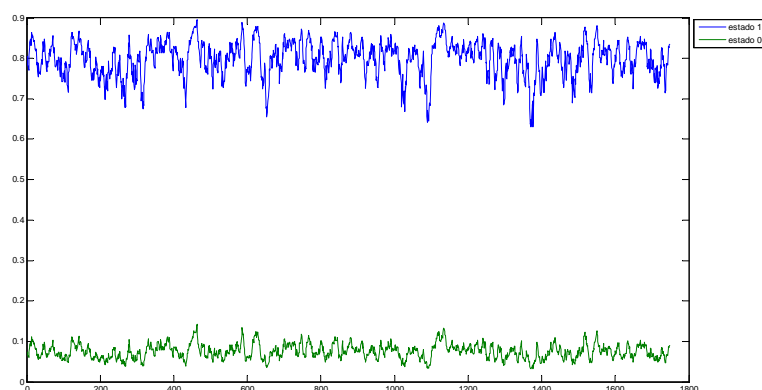


Figura 6: Dinâmica de dependência caudal inferior

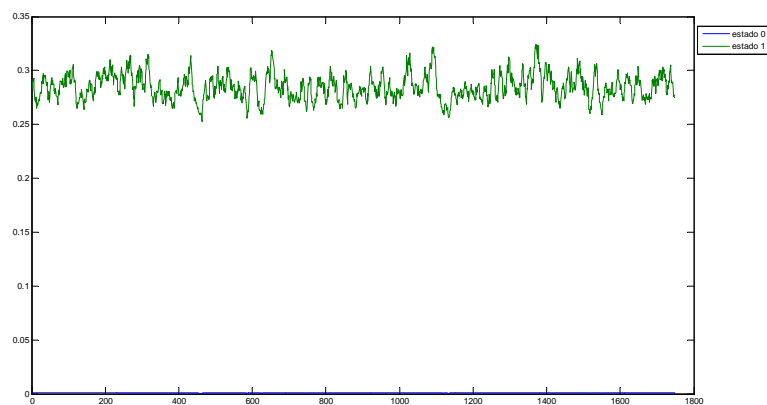


Figura 7: Dinâmica de dependência caudal superior

uma alta dependência, com períodos curtos de uma dependência menor, que nem parecem ser provenientes de uma mudança de regime, dado que a queda na probabilidade não é suave.

Uma sugestão para um trabalho futuro e que talvez possa amenizar essa falta de suavidade na probabilidade dos estados é a inclusão do termo autoregressivo na modelagem dos parâmetros de dependência, que não foi usado aqui por limitação computacional. Além disso, seria necessário que a análise de variância por meio do *bootstrap* contasse com um número maior de replicações.

Outra sugestão para pesquisas posteriores é tentar modelar as marginais das outras taxas de câmbio do Mercosul de uma maneira que seja robusta às intervenções dos respectivos bancos centrais.

Referências

- [1] O.C. da Silva Filho and F.A. Ziegelmann. Dinâmica da Dependência Usando Cópulas com Mudança de Regime.
- [2] A.C. Davison and D.V. Hinkley. *Bootstrap methods and their application*. Cambridge Univ Pr, 1997.
- [3] C.J. Kim and C.R. Nelson. State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications. *MIT Press Books*, 1999.
- [4] RB Nelsen. An Introduction to Copulas. *Lecture Notes in Statistics*, 139.
- [5] A.J. Patton. MODELLING ASYMMETRIC EXCHANGE RATE DEPENDENCE. *International Economic Review*, 47(2):527–556, 2006.