

Textos para Discussão PPGE/UFRGS

Programa de Pós-Graduação em Economia

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Rigidez Assimétrica de Preços e Salários no Brasil: Uma Abordagem DSGE com o Uso do Filtro de Partículas.

Ederson Luiz Schumanski
Marcelo Savino Portugal

Nº 2015/16

(<http://www.ufrgs.br/ppge/textos-para-discussao.asp>)

Porto Alegre/RS/Brasil

Rigidez Assimétrica de Preços e Salários no Brasil: Uma Abordagem DSGE com o Uso do Filtro de Partículas.

Ederson Luiz Schumanski¹
Marcelo Savino Portugal²

Resumo

Este artigo tem como objetivo verificar se há assimetria na rigidez de preços e de salários na economia brasileira; ou seja, se os agentes da economia são mais rígidos para baixo ou para cima para ajustarem seus preços e salários. Além disso, realiza-se a análise dos efeitos da política monetária e fiscal na dinâmica da economia. Para isso, utiliza-se um modelo Dinâmico Estocástico de Equilíbrio Geral (DSGE) não linear com custos de ajustamento assimétricos de preços e de salários com base no trabalho de Aruoba, Bocola e Schorfheide (2013). Esse modelo pode gerar rigidez de preços e de salários para baixo (ou para cima) que podem gerar não linearidades fortes. Diante da não linearidade gerada por esses aspectos, o modelo é solucionado através de um método de solução não linear e os seus parâmetros são estimados com a ajuda do Filtro de Partículas. O resultado encontrado é que tanto os preços quanto os salários nominais são mais rígidos para baixo e essas assimetrias na rigidez influenciam a dinâmica da economia quando esta sofre choques de política monetária e fiscal

Palavras-chave: DSGE, Filtro de Partículas, Política Monetária e Fiscal, Método de Solução Não Linear, Custos de Ajustamento Assimétrico.

Abstract

The objective of this article is to verify if there is asymmetry in the rigidity of prices and wages for the Brazilian economy; i.e. if the economic agents are more rigid downward or upward when adjusting their prices and wages. In addition, it performs the analysis of the effects of monetary and fiscal policy in the dynamics of the economy. For this, it uses a nonlinear model of Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) with asymmetric adjustment costs in prices and wages based on the work of Aruoba, Bocola and Schorfheide (2013). This model can generate prices and wages rigidity downward (or upward) that can produce strong nonlinearities. Considering the non-linearity generated by these aspects, the model is solved through a non-linear solution method and its parameters are estimated with the help of Particle Filter. The obtained result is that both prices and nominal wages are more rigid downwards and these asymmetries in rigidity influence the dynamics of the economy when it suffers shocks from monetary and fiscal policies.

Key-words: DSGE, Particle Filter, Monetary Policy, Fiscal Policy, Non-linear Methods, Asymmetric Adjustment Costs.

JEL: C11, C15, E52, E62

1. Introdução

A chamada crítica de Lucas (1976) foi um marco no avanço da modelagem e análise dos modelos macroeconômicos a partir da década de 1970. A avaliação de políticas econômicas através da utilização de modelos econométricos poderia ser prejudicial, dado que os parâmetros desses modelos não são estruturais; ou seja, não são invariantes a mudanças de regime de política econômica. Em outras palavras, as relações entre as variáveis agregadas tenderiam a mudar quando houvesse mudanças nas políticas macroeconômicas. Assim, em resposta à crítica de Lucas, diversos modelos macroeconômicos foram construídos com base em fundamentos microeconômicos (DSGE).

¹ Economista do Banco Cooperativo Sicredi e aluno de mestrado no PPGE/UFRGS.

² Professor do PPGE/UFRGS, do PPGA/UFRGS e pesquisador do CNPq.

Nos últimos 20 anos, houve enorme progresso na modelagem macroeconômica e os modelos DSGE ganharam popularidade tanto no meio acadêmico quanto no meio profissional. Diversos bancos centrais ao redor do mundo desenvolveram seus modelos DSGE para analisar as flutuações e avaliar as políticas econômicas. Diante desse aumento de importância dada a esses modelos para realizar análises quantitativas, a estimação desses modelos tornou-se cada vez mais popular. A maneira usual para realizar a estimação dos parâmetros estruturais desses modelos é através do uso de técnicas bayesianas e o uso da inferência baseada na verossimilhança para levar as informações contidas nas séries de dados para a economia modelo, como destacam An e Schorfheide (2007). Para isso, primeiramente, o modelo DSGE é resolvido por algum método de solução e é colocado na sua representação de estado de espaço e; então, métodos de filtragem são aplicados para calcular a verossimilhança. Entretanto, a maior parcela dos modelos dinâmicos não apresenta uma função de verossimilhança a qual possa ser calculada analiticamente ou numericamente.

A fim de contornar esse problema, a grande parcela dos trabalhos envolvendo economias dinâmicas foca na representação linearizada das condições de equilíbrio, o que fez do filtro de Kalman uma ferramenta fundamental para a simulação de variáveis não observáveis e para obtenção da verossimilhança do modelo que caracteriza o comportamento da economia de interesse, sendo possível estimar os parâmetros através de técnicas bayesianas. No entanto, o filtro de Kalman assume uma estrutura muito restritiva – representação de estado de espaço linear e distúrbios Gaussianos – o que limita a análise de fenômenos não lineares que podem ser observados nos dados. Fasolo (2012) cita alguns exemplos de não linearidades que são geralmente observadas nos dados: a influência da aversão ao risco e de poupança por precaução sobre as variáveis agregadas, tais como consumo e investimento; as chamadas “fat-tails” (caudas grossas) usualmente verificadas em choques econômicos e mudanças de regime de política fiscal e monetária³; todos esses fenômenos não bem caracterizados em uma estrutura linear. Apesar de não haver um consenso na literatura econômica sobre as vantagens da estimação de aproximações não lineares de modelos DSGE, Villaverde et al. (2006) mostram teoricamente que aproximações não lineares do modelo DSGE estudado por eles levavam a uma maior precisão no cálculo do “pico” da função de verossimilhança do modelo o que, conseqüentemente, geraria impactos nas estimativas dos parâmetros estruturais da economia em questão. Os autores indicam que erros de segunda ordem nas funções de política iriam causar erros de primeira ordem na função de verossimilhança resultante do processo, o que, como consequência, teria resultados catastróficos para os estimadores da versão linear, dado que erros de primeira ordem na função verossimilhança implicariam em estimativas viesadas para os parâmetros do modelo usado. Adicionalmente, os autores mostram que erros na verossimilhança aproximada se acumulariam à medida que o tamanho da amostra aumentasse. Em outras palavras, os erros de aproximação associados com a representação linear dos modelos DSGE podem transmitir erros significantes nas funções de verossimilhança correspondentes⁴ e; assim, como resultado, a aproximação da verossimilhança baseada em um modelo, o qual foi solucionado com um método de solução linear, pode divergir da verossimilhança exata.

Levando tais problemas em consideração e com o intuito de superá-los, Villaverde e Ramírez (2005) propõem o uso do filtro de partículas para calcular a verossimilhança do modelo de Crescimento Neoclássico e apresentam evidências empíricas acerca da superioridade da estimação não linear de

³ Como exemplo de mudança de regime na política monetária brasileira, podem-se citar duas mudanças: a primeira ocorre quando o até então presidente do Banco Central Gustavo Franco foi substituído por Armínio Fraga, o qual assumiu o posto com o objetivo de adotar o sistema de metas de inflação, o que foi realizado em julho de 1999, pela resolução 2.615 do Conselho Monetário Nacional. (Giambiagi e Villela, 2005). A segunda mudança ocorre de maneira implícita, quando Alexandre Tombini – o atual presidente do Banco Central – assumiu o comando ao substituir Henrique Meirelles, assumindo uma postura mais tolerante em relação à inflação, reduzindo a taxa Selic a sua mínima histórica de 7,25 p.p. e a mantendo em patamares baixos mesmo com a inflação acima do centro da meta (4,5%).

⁴ Alves (2011) realiza uma simulação a partir de um extenso conjunto de dados artificiais partindo de uma solução não linear de um modelo DSGE e estima os parâmetros estruturais através de aproximações log-lineares das condições de equilíbrio. O autor se depara com um viés significativo nas estimativas dos parâmetros de rigidez de Calvo (1983) – rigidez de preços e elasticidade da oferta de trabalho.

modelos DSGE em comparação com os estimadores lineares. Todavia, as evidências empíricas apresentadas pelos autores não são generalizadas, sendo válidas apenas para o modelo simples utilizado. Portanto, a fim de trazer argumentos mais consistentes em favor dos métodos não lineares, Villaverde e Ramírez (2007) estimam uma versão estendida do modelo de crescimento Neoclássico acrescentando não linearidades fundamentais através do argumento de que os choques que conduzem o modelo estão sujeitos à volatilidade estocástica, expondo que aproximações lineares acabariam por eliminar os efeitos desses choques, tornando esse tipo de aproximação ineficaz e, com isso, acarretando uma maior atratividade no uso de aproximações não lineares.

Sendo assim, é válido destacar que a capacidade de realizar a inferência com base na verossimilhança torna-se importante por alguns motivos. Primeiramente, seguindo Monfort (1996), por uma perspectiva empírica, esse tipo de inferência é uma maneira simples de lidar com modelos mal especificados, o que é o caso de economias de equilíbrio dinâmico, as quais são falsas por construção o que acaba tornando a inferência baseada em verossimilhança atrativa por suas propriedades assintóticas e pelo seu bom comportamento em amostras pequenas, mesmo quando os modelos são mal especificados, como argumentam Villaverde e Ramírez (2005). O outro motivo dá-se por uma perspectiva teórica, baseada no princípio de que toda a evidência empírica obtida nos dados deve estar contida na função de verossimilhança, como destacam Berger e Wolpert (1988). Com base nessa afirmação, parece plausível afirmar que quanto mais próximo o pesquisador conseguir chegar da verossimilhança do modelo estudado; ou seja, mais perto da verdadeira verossimilhança, mais ele conseguirá extrair dos dados toda a informação necessária e disponível para realizar inferências. Portanto, a escolha correta da técnica de aproximação torna-se uma etapa fundamental para o pesquisador, pois essa escolha terá influências fundamentais para a função verossimilhança do modelo estudado.

Em um primeiro momento, ao avaliar os argumentos anteriores, a escolha de um método de aproximação não linear parece ser a mais indicada para solucionar um modelo dinâmico de equilíbrio. Contudo, deve-se deixar claro que modelos que não desempenhem alguma espécie de não linearidade levam os métodos de aproximação não linear a gerar um equilíbrio muito semelhante com a forma linearizada. Com base nisso, o uso de métodos de solução não lineares só se fazem úteis quando o modelo trabalhado gera algum tipo de não linearidade⁵. No presente trabalho, o uso de métodos de solução não lineares se faz necessário em decorrência do modelo utilizado. A aplicação é focada na estimação de um modelo Novo-Keynesiano com assimetria nos custos de ajustamento de preços e de salários, com base no trabalho de Kim e Murcia (2009) e Aruoba et al. (2013). Esse modelo tem a capacidade de gerar rigidez de preços e de salários para baixo (ou para cima). Ao permitir a assimetria nos custos de ajustamento, as regras de decisões dos agentes da economia podem se tornar fortemente não lineares. O ponto chave do modelo é a introdução de uma assimetria nos custos de ajuste de preços e de salários da economia. Ou seja, o modelo além de considerar rigidez de preços e salários, acrescenta ainda uma assimetria na rigidez. Em outras palavras, dependendo do sinal e do tamanho dos parâmetros associados à assimetria, a rigidez de preços e de salários na economia brasileira pode ser mais rígida para baixo ou para cima. Tais assimetrias podem ser causadas pela estrutura do mercado de trabalho brasileiro, onde o nível de informalidade é elevado e há um alto grau de rotatividade do emprego, bem como uma elevada parcela dos postos de trabalho pertencem à categoria de emprego militar e funcionários públicos, onde os salários são mais rígidos. Além disso, tais assimetrias podem acabar se refletindo nos preços das firmas, uma vez que grande parte dos custos das empresas brasileiras se dá com o pagamento de salários dos seus empregados e a rigidez (para baixo ou para cima) deve se refletir também nos preços dos produtos, os

⁵ De acordo com Aruoba et al. (2013), há dois tipos de não linearidades que podem aparecer em modelos DSGE não lineares. A primeira são não linearidades aproximadamente suavizadas, onde as regras de decisão exibem curvatura e possivelmente assimetrias como aquelas que são geradas por funções de custo ou perdas assimétricas. O outro tipo são os chamados “kinks” nas regras de decisão, tais como os que são gerados pelo limite inferior zero nas taxas de juros nominais. Ainda, os autores destacam que as características não lineares podem surgir de maneira endógena ou exógena. Curvaturas nas funções de utilidade, nas funções de custo de ajustamento e nas funções de produção podem gerar regras de decisão não lineares das famílias e firmas endogenamente. Por sua vez, um exemplo de uma não linearidade exógena é a volatilidade estocástica nos choques exógenos que gera flutuações nos ciclos de negócios.

quais podem se tornar ainda mais rígidos (para cima ou para baixo) do que os salários e; assim, acabar gerando efeitos inflacionários mais perversos na economia como um todo. Assim, em uma economia mais rígida quando se trata de reduzir preços e salários, choques de política monetária expansionista através da redução dos juros, ou choques fiscais, tais como redução de impostos ou elevação dos gastos do governo, poderiam levar a economia a passar por períodos mais longos com uma inflação mais elevada, causando desequilíbrios na economia, a qual demoraria mais para se ajustar.

Portanto, o presente trabalho busca responder as seguintes questões: a rigidez de preços e de salários na economia brasileira é assimétrica; ou seja, os agentes da economia agem de maneira não linear, sendo mais relutantes em ajustar seus preços e salários para baixo do que para cima? Se sim, como essas assimetrias acabam se refletindo no comportamento da economia quando esta sofre um choque temporário de política monetária e fiscal? Logo, o presente trabalho busca estimar os parâmetros estruturais da economia brasileira – principalmente aqueles relacionados à assimetria na rigidez - e analisar o comportamento das principais variáveis macroeconômicas aos movimentos de política monetária e fiscal. Para isso, propõe-se um modelo DSGE com custos de ajustamento assimétricos nos preços e nos salários, os quais podem gerar não linearidades no comportamento dos agentes da economia, proposto por Kim e Murcia (2009) e expandido por Aruoba et al. (2013). O modelo é resolvido usando métodos de perturbação e estimado com dados brasileiros, utilizando-se para isso, o Filtro de Partículas a fim de construir a verossimilhança. É válido ressaltar que o interesse nesse filtro não está somente na sua habilidade de estimar modelos não lineares. Empiricamente, foi comprovada sua superioridade em comparação com o Filtro de Kalman em modelos DSGE. Diversos autores reportaram uma performance superior das suas estimativas baseadas no modelo não linear estimado com a ajuda de Métodos Sequenciais de Monte Carlo. Exemplos são An e Schorfheide (2007), Villaverde e Ramírez (2007) e Amisano e Tristani (2010), os quais comparam seus resultados a partir de um modelo solucionado por um método não linear e, assim, estimado via Filtro de Partículas e o mesmo modelo na sua forma linearizada estimado com o auxílio do Filtro de Kalman. Mesmo no trabalho de Villaverde e Ramírez (2005), onde os autores estimam um modelo quase linear (modelo de Crescimento Neoclássico), o Filtro de Partículas teve melhor desempenho do que seu concorrente – o Filtro de Kalman.

O trabalho está organizado em quatro seções, além da introdução. Na seção 2, é apresentado o modelo DSGE não linear com custos de ajustamento assimétrico nos preços e nos salários, sendo realizada uma breve análise do método de solução empregado. Por sua vez, na seção seguinte, a metodologia de estimação é apresentada, a qual é focada no Filtro de Partículas. Na seção 4, são mostrados e comentados os resultados obtidos com o estudo empírico. Por fim, apresentam-se as considerações finais.

2. O Modelo Teórico

2.1. Evolução dos Modelos DSGE e a Abordagem Novo Keynesiana

Procurar entender e analisar de que maneira ocorrem as flutuações nas variáveis macroeconômicas – como produto, inflação, desemprego, entre outras – levou muitos pesquisadores no campo da economia, a partir da segunda metade do século XX, a desenvolver diversos modelos os quais pudessem explicar esses fenômenos. Avanços na teoria macroeconômica, em conjunto com o desenvolvimento das técnicas econométricas permitiram a construção de modelos mais robustos baseados em pilares microeconômicos, apresentando bom desempenho quanto ao ajuste dos dados e previsões. Tais modelos são conhecidos como DSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium). “Dinâmicos” porque o tempo importa; ou seja, o passado tem influência no período presente e o futuro (via expectativas) também impacta o hoje. “Estocástico” porque há choques estruturais os quais são responsáveis por ciclos e oscilações nas diversas variáveis macroeconômicas. E por último, “Equilíbrio Geral” porque a alocação dos recursos na econômica é feita via mercados; ou seja, há diversos mercados interdependentes interagindo em um dado momento do tempo.

Kydland e Prescott (1982) forneceram as ferramentas necessárias para analisar o comportamento das flutuações econômicas. Tais autores construíram um modelo supondo um mercado perfeitamente competitivo, onde agentes maximizadores de utilidade estariam sujeitos a restrições orçamentárias e

tecnológicas. Segundo Romer (2012), o que esses modelos de ciclos reais tentam alcançar é a construção de um modelo de equilíbrio geral microfundamentado e uma especificação dos choques que caracterizam as principais flutuações macroeconômicas. Além disso, de acordo com Rebelo (2005), houve três ideias revolucionárias no trabalho seminal de 1982. A primeira ideia, que se baseia no trabalho anterior de Lucas e Prescott (1971), é que os ciclos de negócios podem ser estudados usando modelos dinâmicos de equilíbrio geral. A segunda ideia é a da possibilidade de unificar os ciclos de negócios com a teoria do crescimento, insistindo que os modelos de ciclos de negócios devem ser consistentes com as regularidades empíricas de crescimento de longo prazo. Por fim, a terceira ideia é a de que se pode ir muito além da comparação qualitativa das propriedades do modelo com fatos estilizados que dominaram os trabalhos teóricos sobre a macroeconomia até 1982.

A principal vantagem do modelo de ciclos reais é a de não estar sujeito às críticas de Sims⁶ e de Lucas⁷, pois tais modelos possuíam fundamentos microeconômicos. Em outras palavras, as restrições impostas entre as variáveis não seria ad hoc, pois estariam baseadas numa descrição do comportamento de consumidores, firmas e governo. Além disso, os parâmetros desses modelos são ditos estruturais, pois estes são invariantes a mudanças de regimes de política monetária uma vez que estariam diretamente relacionados a preferências e tecnologia, as quais tendem a se manter estáveis no curto e no médio prazo. Por outro lado, o ponto fraco do modelo é que este não é verificado na prática em decorrência da ausência de um setor monetário. Tal setor não é necessário porque a presença de competição perfeita e preços totalmente flexíveis torna a moeda superneutra, não afetando as variáveis reais da economia; ou seja, a política monetária nesse tipo de modelo torna-se irrelevante. Entretanto, em estudos empíricos como os de Christiano, Eichenbaum e Evans (1999) não se verificaram a superneutralidade da moeda em dados reais, o que gerou críticas ao modelo de ciclos reais por não apresentar evidências empíricas.

Dadas as duras críticas da teoria sobre o modelo de ciclos reais em relação às evidências empíricas que mostraram que as previsões do modelo acerca dos distúrbios monetários eram contraditórias à realidade, houve a necessidade de algumas mudanças nas suposições do modelo. De acordo com Galí (2008), partindo-se do modelo de ciclos reais, com a alteração de algumas hipóteses da modelagem original e a introdução de algumas fricções, surgiu o modelo Novo Keynesiano, o qual considera competição monopolística entre as firmas e a incorporação de rigidez nominal – a qual implica na não neutralidade da moeda no curto prazo. A maioria dos modelos DSGE atuais assumem que os preços e/ou os salários são rígidos em termos nominais; ou seja, eles não são reajustados perfeitamente em cada período. Os dois mecanismos de preços mais usados na literatura macroeconômica são o de Calvo (1983) e o de Rotemberg (1982). O primeiro mecanismo assume que os preços se ajustam em intervalos aleatórios de tempo de forma escalonada e essa forma de rigidez é utilizada em trabalhos como os de Christiano et al. (2005) e de Smets e Wouters (2004). Por sua vez, no mecanismo proposto por Rotemberg, os preços são ajustados apenas de forma mais lenta do que o seu nível ideal; porém, de maneira idêntica por todas as firmas, o que implica custos convexos. Essa espécie de rigidez foi utilizada em trabalhos tais como os de Schmitt-Grohé e Uribe (2004) e An e Schorfheide (2007).

2.2. Modelo DSGE com Custos de Ajustamento Assimétricos nos Preços e nos Salários

O modelo trabalhado aqui consiste em uma única firma produtora de bens finais, bem como um contínuo de firmas produtoras de bens intermediários que servem como insumo para a firma produtora de bem final. Além disso, considera-se uma família representativa que maximiza sua utilidade intertemporal sujeita à sua restrição orçamentária. Por fim, no último setor da economia, existe uma autoridade monetária e fiscal. O modelo a ser exposto está baseado em Kim e Murcia (2009) e Aruoba et al. (2013), onde os autores substituem as funções de custos de ajustamento proposta por Rotemberg (1982) pelas

⁶ Sims (1980) argumenta que as restrições impostas aos modelos estruturados para torná-los identificáveis eram muito fortes e por isso diminuía a eficácia e a qualidade da previsão dos modelos. O autor introduziu o modelo Vetorial Auto-Regressivo (VAR), que não era teórico e suplantava a necessidade dos modelos estruturados de serem identificáveis.

⁷ Lucas (1976) argumenta que a utilização de modelos econométricos com o objetivo de formular políticas econômicas poderia ser prejudicial, pois os parâmetros desses modelos não seriam estruturais; ou seja, estes não seriam invariantes à política econômica e; assim, seriam suscetíveis a variações quando houvesse mudanças no cenário econômico.

funções “linex” de custos de ajustamento, as quais podem capturar rigidez de preços e salários para baixo (bem como para cima). O modelo abstrai acumulação de capital e trata de uma economia fechada, para torná-lo mais simples. No presente trabalho, o objetivo de usar essas funções de custos de ajustamento assimétricos é tentar captar de forma mais realista o comportamento dos formadores de preço da economia e; assim, conseguir entender melhor os movimentos de salários e de preços na economia. Parece que ambos os métodos propostos por Calvo (1983) e Rotemberg (1982) de gerar rigidez de salários e de preços na economia não produzem um mecanismo completo de rigidez. Tais métodos consideram que a rigidez é simétrica; ou seja, não levam em consideração que os agentes da economia possam ser mais rígidos em ajustar seus preços e salários para baixo do que para cima, tendo um comportamento assimétrico na rigidez. Em outras palavras, parece plausível acreditar que os ofertantes de trabalho são muito mais rígidos em aceitar reduções de salários do que aumentos destes; além disso, no caso das empresas, estas são mais rígidas a reduzir os preços dos seus produtos do que elevá-los, ainda mais em um mercado monopolisticamente competitivo, com empresas tendo algum grau de monopólio. A outra motivação por utilizar essas funções se dá pelas evidências empíricas de que a introdução de tais funções geram não linearidades no modelo DSGE que conseguem explicar as não linearidades observadas nos dados dos Estados Unidos, como mostra o trabalho de Aruoba et al. (2013). Contudo, os autores destacam que as dinâmicas não lineares verificadas na inflação e nos salários não geram não linearidades no crescimento do PIB ou na taxa de juros. Ou seja, as não linearidades verificadas nas dinâmicas dos salários e dos preços não se espalham de maneira explícita pelas outras variáveis da economia dos Estados Unidos. A seguir, é apresentada as equações do modelo proposto por Aruoba et al. (2013).

2.2.1 Firms

No modelo proposto, o país produz um único bem final e um conjunto de bens intermediários indexados por $j \in [0,1]$. As firmas produtoras de bens finais são perfeitamente competitivas e este bem é consumido pelas famílias da economia. Por sua vez, as firmas de bens intermediários produzem bens, os quais são diferenciados, em um mercado monopolisticamente competitivo.

As firmas produtoras de bens finais são perfeitamente competitivas e estas combinam os bens intermediários indexados por $j \in [0,1]$ ao utilizar a seguinte função de produção:

$$Y_t = \left(\int_0^1 Y_t(j)^{1-\lambda_{p,t}} dj \right)^{\frac{1}{1-\lambda_{p,t}}}. \quad (1)$$

Note que $1/\lambda_{p,t} > 1$ representa a elasticidade de demanda para cada bem intermediário contido na tecnologia. Dado que os produtores de bens finais se encontram em um mercado perfeitamente competitivo, eles maximizam seus lucros sujeitos a função de produção (1) tomando como dados os preços de todos os bens intermediários $P_t(j)$ e o preço dos bens finais P_t . Então, o problema de maximização se dá da seguinte forma:

$$\max_{Y_t(j)} P_t Y_t - \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj. \quad (2)$$

Ao resolver o problema da firma, chega-se a função de demanda por insumos, a qual é dada por:

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-1/\lambda_{p,t}} Y_t. \quad (3)$$

Da equação (3), tem-se que a demanda por bens intermediários depende do preço $P_t(j)$ do bem intermediário relativo ao preço P_t do bem final. Ao utilizar a demanda agregada Y_t em conjunto com a condição de lucro zero da firma $P_t Y_t = \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj$ consegue-se chegar a relação entre os preços dos bens intermediários e o bem final:

$$P_t = \left(\int_0^1 P_t(j)^{\frac{\lambda_{p,t}-1}{\lambda_{p,t}}} dj \right)^{\frac{\lambda_{p,t}}{\lambda_{p,t}-1}}. \quad (4)$$

Por sua vez, cada bem intermediário j é produzido por uma firma que compete em um mercado com concorrência monopolista e que utiliza serviços de mão de obra H_t , por meio da seguinte tecnologia de retornos constantes de escala:

$$Y_t(j) = A_t H_t(j), \quad (5)$$

onde A_t é um processo exógeno de produtividade, o qual é comum a todas as firmas intermediárias. Tais firmas alugam serviços de mão de obra $H_t(j)$ ao preço nominal W_t . Considerando que os bens produzidos por cada firma são diferenciados entre si, as firmas possuem certo grau de poder no mercado de competição monopolista; assim, os preços são uma variável de escolha. Contudo, o ajuste dos preços nominais pelas firmas é assumido ser custoso. Em outras palavras, essas firmas enfrentam rigidez nominal em termos de custos de ajustamento de preço. Tais custos, expressos como uma fração da receita das firmas (ver equação (7)), tomam a forma de uma função “linex” (introduzida pela primeira vez por Varian, 1974) e são definidos da seguinte forma:

$$\Phi_p \left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} \right) = \varphi_p \left[\frac{\exp \left(-\psi_p \left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} - \pi \right) \right) + \psi_p \left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} - \pi \right) - 1}{\psi_p^2} \right], \quad (6)$$

onde π é a taxa de inflação de *steady-state* associada com o bem final. O parâmetro φ_p define o grau de rigidez de preços, enquanto que o parâmetro ψ_p controla a assimetria do custo do ajustamento; ou seja, a assimetria na rigidez de preços. Assim, tomando como dados os salários nominais, o preço dos bens finais, a demanda por produtos intermediários e a restrição tecnológica, cada firma j escolhe seu insumo trabalho $H_t(j)$ e seu preço $P_t(j)$ ao maximizar o valor presente dos lucros futuros:

$$E_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s Q_{t+s|t} \left[\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}} \left(1 - \Phi_p \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s-1}} \right) \right) Y_{t+s}(j) - \frac{1}{P_{t+s}} W_{t+s} H_{t+s}(j) \right] \right\}. \quad (7)$$

Aqui, $Q_{t+s|t}$ é o valor no tempo t de uma unidade de consumo no período $t+s$ para a família, a qual é tratada como exógena pela firma.

Diante disso, a firma j escolhe o seu insumo trabalho $H_t(j)$ e o preço $P_t(j)$ a fim de maximizar o valor presente dos seus lucros futuros. Ao substituir $Y_t(j)$ pela função de produção dada por (5) dentro da equação da maximização do valor presente dos lucros futuros que é dada por (7), pode-se escrever a função objetivo da firma intermediária por:

$$E_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s Q_{t+s|t} \left[\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s}} \left(1 - \Phi_p \left(\frac{P_{t+s}(j)}{P_{t+s-1}} \right) \right) A_{t+s} H_{t+s}(j) - \frac{1}{P_{t+s}} W_{t+s} H_{t+s}(j) \right] \right\}. \quad (8)$$

Essa função objetivo é; então, maximizada em relação à $H_t(j)$ e $P_t(j)$ sujeito a:

$$A_{t+s} H_{t+s}(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-1/\lambda_{p,t}} Y_{t+s}. \quad (9)$$

Utiliza-se $\mu_{t+s} \beta^s Q_{t+s|t}$ para denotar o multiplicador de Lagrange associado com a restrição dada acima. Fixando $Q_{t|t} = 1$, a condição de primeira ordem em relação à $H_t(j)$ e $P_t(j)$ é dada, respectivamente, por:

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{P_t(j)}{P_t} \left[1 - \Phi_p \left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} \right) \right] A_t - \mu_t A_t. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P_t} \left[1 - \Phi_p \left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} \right) \right] A_t H_t(j) - \frac{P_t(j)}{P_t P_{t-1}(j)} \Phi'_p \left(\frac{P_t(j)}{P_{t-1}(j)} \right) A_t H_t(j) - \frac{\mu_t}{\lambda_{p,t} P_t} \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\frac{1}{\lambda_{p,t}}-1} Y_t + \\ & \beta E_t \left\{ Q_{t+1|t} \frac{P_{t+1}^2(j)}{P_{t+1} P_t^2(j)} \Phi'_p \left(\frac{P_{t+1}(j)}{P_t(j)} \right) A_{t+1} H_{t+1}(j) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

2.2.2. Insumo Trabalho

Os serviços de mão de obra utilizados pelas firmas produtoras de bens intermediários são ofertados por um conjunto de sindicatos perfeitamente competitivos. O sindicato agrega os diferentes serviços ofertados pelas famílias de acordo com a seguinte tecnologia:

$$H_t = \left(\int_0^1 H_t(k)^{1-\lambda_w} dk \right)^{\frac{1}{1-\lambda_w}}. \quad (12)$$

O sindicato escolhe a demanda para cada tipo de trabalho com o objetivo de maximizar seu lucro, tomando como dados $W_t(k)$ e W_t . Então, a demanda ótima por trabalho é dada por:

$$H_t(k) = \left(\frac{W_t(k)}{W_t} \right)^{\frac{-1}{\lambda_w}} H_t. \quad (13)$$

Uma vez que o mercado de trabalho é perfeitamente competitivo, isso implica que o custo do trabalho W_t e os salários nominais pagos para os trabalhadores são relacionados da seguinte forma:

$$W_t = \left(\int_0^1 W_t(k)^{\frac{\lambda_w-1}{\lambda_w}} dk \right)^{\frac{\lambda_w}{\lambda_w-1}}. \quad (14)$$

2.2.3. Famílias

No modelo, cada família consiste em um contínuo de membros indexados por k . Os membros da família fornecem um seguro entre si, o qual equipara suas utilidades marginais em cada estado do tempo. Um membro da família do tipo k recebe utilidade pelo consumo $C_t(k)$ relativo a um hábito de consumo. Assume-se que esse hábito é dado por um nível de tecnologia A_t . Tal suposição garante que a economia tratada aqui evolui ao longo de uma trajetória de crescimento equilibrada. Além disso, o membro da família deriva desutilidade das horas trabalhadas $H_t(k)$. Assim, as famílias maximizam sua utilidade intertemporal de acordo com a seguinte função:

$$E_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left[\frac{(c_{t+s}(k)/A_{t+s})^{1-\tau}-1}{1-\tau} - \chi_H \frac{H_{t+s}^{1+1/v}(k)}{1+1/v} \right] \right\}, \quad (15)$$

onde β é o fator de desconto intertemporal, $1/\tau$ é a elasticidade intertemporal de substituição, ou coeficiente de aversão ao risco. Além disso, χ_H é o fator de escala que determina as horas trabalhadas no *steady-state* e; por fim, v representa a elasticidade de oferta de trabalho de Frisch.

O membro da família é monopolista na sua oferta de mão de obra. Como um monopolista, ele escolhe o salário nominal, tomando como dado a demanda dos sindicatos. Supõe-se que as fricções do mercado de trabalho induzem um custo no ajustamento dos salários nominais. Tais custos de ajustamento são pagos como uma fração dos rendimentos do trabalho (ver equação (17)) e esses custos possuem a mesma estrutura assumida para os preços:

$$\Phi_w \left(\frac{W_t(k)}{W_{t-1}(k)} \right) = \varphi_w \left[\frac{\exp \left(-\Psi_w \left(\frac{W_t(k)}{W_{t-1}(k)} - \gamma\pi \right) \right) + \Psi_w \left(\frac{W_t(k)}{W_{t-1}(k)} - \gamma\pi \right) - 1}{\Psi_w^2} \right], \quad (16)$$

onde $\gamma\pi$ é a taxa de crescimento dos salários nominais e γ é a taxa de crescimento médio da tecnologia a ser definida nas subseções seguintes. A forma funcional das funções de custos de ajustamento de preços e de salários é atrativa por quatro razões: primeira, o custo depende tanto do sinal (se foi um aumento ou uma redução de salário) quanto da magnitude (se esse aumento ou redução de salário foi grande ou pequeno) do ajustamento do salário no período t em relação ao período $t - 1$. Considere, por exemplo, o caso onde $\Psi_w > 0$. Conforme os salários no tempo t se elevam sobre os salários no tempo $t - 1$, o termo linear na função domina e; com isso, os custos associados com o salário aumentam linearmente. Por sua vez, conforme o salário no tempo t se reduz abaixo do salário em $t - 1$, é o termo exponencial na função que acaba dominando e; assim, o custo associado com a redução de salário cresce exponencialmente. Consequentemente, reduções de salários nominais envolvem um custo maior do que elevações, mesmo em casos em que as duas magnitudes de mudança sejam iguais. O inverso é verdadeiro no caso em que $\Psi_w < 0$. Segunda, essa função “aninha” a forma quadrática que ocorre no caso especial em que $\Psi_w \rightarrow 0^8$ (isto é, a função de custo quadrática proposta por Rotemberg, 1982) e os custos de ajustamento de salário são simétricos. O que torna também possível a comparação entre o modelo com custos de assimetria e a versão restrita com custos quadráticos. Terceiro, a função “linex” é diferenciável em todos os pontos e estritamente convexa para qualquer $\varphi_w > 0$. Finalmente, a quarta razão é que essa função não se opõe a cortes de salários nominais que, embora sejam relativamente raros, são possíveis de acontecer.

Adicionalmente, os membros da família tem um trade-off entre consumo e poupança. Eles têm acesso ao mercado de títulos doméstico, onde os títulos nominais do governo $B_t(k)$ são pagos por uma taxa de juros R_t . Além disso, eles recebem os lucros reais $D_t(k)$ das firmas, as quais eles são os donos e; por fim, tem de pagar impostos lump-sum T_t para a autoridade fiscal conseguir financiar seus gastos. Então, a restrição orçamentária intertemporal das famílias tem o seguinte formato:

$$P_t C_t(k) + B_t(k) + T_t = W_t(k) H_t(k) \left(1 - \Phi_w \left(\frac{W_t(k)}{W_{t-1}(k)} \right) \right) + R_{t-1} B_{t-1}(k) + P_t D_t(k) + P_t SC_t, \quad (17)$$

onde SC_t é o fluxo líquido que a família recebe de um conjunto de estado de contingência. Denota-se o multiplicador de lagrange associado com a restrição orçamentária por λ_t . A usual condição de transversalidade de acumulação de ativos é aplicada, a qual exclui esquemas de Ponzi game.

Diante disso, no caso das famílias do modelo, a condição de primeira ordem com relação ao consumo da maximização da utilidade intertemporal (15) sujeita a restrição orçamentária dada pela equação (17) é dada por:

$$P_t \lambda_t = \left(\frac{C_t(k)}{A_t} \right)^{-\tau} \frac{1}{A_t}. \quad (18)$$

Além disso, defina:

$$Q_{t+1|t} = \frac{P_{t+1} \lambda_{t+1}}{P_t \lambda_t}. \quad (19)$$

Assim, ao utilizar a definição acima, a condição de primeira ordem para os investimentos em títulos do governo torna-se:

⁸ Para verificar esse caso, tome o limite de $\Phi(\cdot)$ conforme $\Psi \rightarrow 0$ aplicando a regra de l'Hôpital duas vezes.

$$1 = \beta E_t \left\{ Q_{t+1|t} \frac{R_t}{\pi_{t+1}} \right\}. \quad (20)$$

Com relação ao mercado de trabalho, cada membro k da família é um competidor monopolista com relação a sua escolha de salário. Ao substituir a demanda ótima por trabalho que é dada pela equação (13) na função de utilidade intertemporal dada por (15) e na restrição orçamentária no tempo $t + s$ dada por (17), chega-se nas seguintes expressões:

$$E_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left[\frac{(c_{t+s}(k)/A_{t+s})^{1-\tau}-1}{1-\tau} - \chi_H \frac{1}{1+\frac{1}{\nu}} \left(\frac{W_{t+s}(k)}{W_{t+s}} \right)^{-\frac{(1+\frac{1}{\nu})}{\lambda_w}} H_t^{1+\frac{1}{\nu}} \right] \right\}. \quad (21)$$

$$P_{t+s} C_{t+s}(k) + B_{t+s}(k) + T_{t+s} = W_{t+s}(k) \left(\frac{W_{t+s}(k)}{W_{t+s}} \right)^{-\frac{1}{\lambda_w}} H_{t+s}(k) \left(1 - \Phi_w \left(\frac{W_{t+s}(k)}{W_{t+s-1}(k)} \right) \right) + R_{t+s-1} B_{t+s-1}(k) + P_{t+s} D_{t+s}(k) + P_{t+s} S C_{t+s}. \quad (22)$$

Diante dessas expressões e tomando-se como dada a demanda por serviços relacionados a trabalho agregado H_{t+s} , a condição de primeira ordem da maximização de (21) sujeita a (22) em relação à $W_t(k)$ dá a seguinte expressão:

$$\frac{\chi_H}{\lambda_w W_t} \left(\frac{W_t(k)}{W_t} \right)^{-\frac{(1+\frac{1}{\nu})}{\lambda_w}-1} H_t^{1+\frac{1}{\nu}} + \lambda_t \left(\frac{W_t(k)}{W_t} \right)^{-\frac{1}{\lambda_w}} H_t \left(1 - \Phi_w \left(\frac{W_t(k)}{W_{t-1}(k)} \right) \right) - \frac{\lambda_t}{\lambda_w} \frac{W_t(k)}{W_t} \left(\frac{W_t(k)}{W_t} \right)^{-\frac{1}{\lambda_w}-1} H_t \left(1 - \Phi_w \left(\frac{W_t(k)}{W_{t-1}(k)} \right) \right) - \frac{\lambda_t}{\lambda_w} \frac{W_t(k)}{W_t} \left(\frac{W_t(k)}{W_t} \right)^{-\frac{1}{\lambda_w}-1} H_t \left(1 - \Phi_w \left(\frac{W_t(k)}{W_{t-1}(k)} \right) \right) = 0. \quad (23)$$

2.2.4. Governo: Autoridade Monetária e Fiscal

A autoridade monetária adota um regime de metas de inflação e determina a taxa de juros com base em uma regra de Taylor com suavização da taxa de juros. De acordo com a especificação do modelo, o Banco Central reage quando ocorrem desvios na inflação da sua meta e desvios do crescimento do produto do seu equilíbrio do *steady-state* γ . Assim, a regra de política monetária adotada pelo Banco Central do país é dada da seguinte maneira:

$$R_t = R_{t-1}^{\rho_R} \left[r \pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\psi_1} \left(\frac{Y_t}{\gamma Y_{t-1}} \right)^{\psi_2} \right]^{1-\rho_R} \exp(\varepsilon_{R,t}), \quad (24)$$

onde r é a taxa de juros real de *steady-state*, π_t é a taxa de inflação definida como $\pi_t = P_t/P_{t-1}$ e π^* é a meta de inflação, a qual coincide com a taxa de inflação de *steady-state* no equilíbrio.

Por sua vez, a autoridade fiscal consome uma fração ζ_t do produto agregado Y_t , onde $\zeta_t \in [0,1]$ e segue um processo exógeno. O governo aplica um imposto de montante fixo para financiar qualquer déficit na sua receita. A restrição orçamentária do governo é dada por:

$$P_t G_t + R_{t-1} B_{t-1} = T_t + B_t, \quad (25)$$

onde $G_t = \zeta_t Y_t$.

2.2.5. Processos Exógenos

A economia do modelo é perturbada por quatro processos exógenos. A produtividade agregada evolui de acordo com:

$$\ln A_t = \ln \gamma + \ln A_{t-1} + \ln a_t, \quad (26)$$

onde $\ln a_t = \rho_a \ln a_{t-1} + \varepsilon_{a,t}$. Então, em média a tecnologia cresce a taxa γ e, por sua vez, a_t captura as flutuações exógenas da taxa normal de crescimento da tecnologia. Define-se $g_t = 1/(1 - \zeta_t)$. Assume-se que:

$$\ln g_t = (1 - \rho_g) \ln g + \rho_g \ln g_{t-1} + \varepsilon_{g,t}. \quad (27)$$

A elasticidade inversa da demanda por bens intermediários evolui de acordo com um processo autoregressivo de primeira ordem em logs:

$$\ln \lambda_{p,t} = (1 - \rho_p) \ln \lambda_{p,t-1} + \varepsilon_{p,t}. \quad (28)$$

Por fim, o choque de política monetária $\varepsilon_{R,t}$ assume-se ser serialmente não correlacionado. Todos os quatro processos são independentes e são normalmente distribuídos com média zero e desvio-padrão σ_z , σ_g , σ_p e σ_R .

2.3. Solução do Modelo

A natureza não linear geralmente associada aos modelos DSGE faz com que geralmente estes não possuam uma solução analítica fechada e; conseqüentemente, essa não linearidade implica em uma função de verossimilhança⁹ que não pode ser calculada analiticamente ou numericamente. A fim de contornar tal obstáculo, a grande parcela da literatura voltada para economias dinâmicas focou na verossimilhança aproximada obtida a partir da versão log-linearizada do modelo original. Ao utilizar essa abordagem, o uso do filtro de Kalman torna-se possível para a construção da função verossimilhança, bem como para realizar a estimação. Entretanto, a linearização depende tanto da aproximação precisa da solução do modelo por uma relação linear quanto da suposição de que os choques na economia são normalmente distribuídos; porém, ambas as hipóteses são problemáticas. Primeiramente, o impacto da linearização é mais severo do que aparenta. Villaverde et al. (2006) comprovam que erros de segunda ordem nas funções de política podem ter efeitos de primeira ordem na função verossimilhança resultante. Além disso, eles provam que os erros na verossimilhança ficam agravados à medida que o tamanho da amostra aumenta; ou seja, pequenos erros nas funções de política se acumulam na mesma taxa que o tamanho da amostra aumenta. Diante disso, Villaverde e Ramírez (2005), Amisano e Tristani (2010), An e Schorfheide (2007) e Andreasen (2011) usam aproximações não lineares nos seus respectivos modelos e reportam que tais aproximações entregam um ajuste mais adequado aos dados. O segundo, a hipótese de choques normais impede a investigação de modelos em que a volatilidade é variante no tempo. Villaverde e Ramírez (2007) utilizam um modelo onde os choques estão sujeitos à volatilidade estocástica e isso induz tanto não linearidades fundamentais no modelo quanto distribuições não normais e os autores argumentam que a utilização de um método de aproximação linear causaria a eliminação dos efeitos desses choques não conseguindo explorar esse mecanismo, tornando fundamental a aproximação não linear para a análise do modelo proposto por eles. Por sua vez, caso semelhante ocorre no modelo proposto por Kim e Murcia (2009) e ampliado por Aruoba et al. (2013), o qual foi utilizado nesse trabalho. A utilização de uma versão linearizada do modelo eliminaria as assimetrias nos custos de ajustamento de preços e salários, o que não permitiria analisar os efeitos gerados na economia advindos

⁹ Lembrando que, como destacam An e Schorfheide (2007), a inferência através da verossimilhança é uma ferramenta útil para levar os modelos de equilíbrio dinâmico para os dados reais da economia.

da introdução desses mecanismos de rigidez¹⁰. Assim, o uso de um método de aproximação não linear a fim de manter a estrutura não linear do modelo é aconselhável.

Portanto, antes de voltar às atenções para a estimação do modelo, é preciso, primeiramente, definir qual o método de solução não linear a ser utilizado. Considerando que o método de solução proporciona as funções políticas que vão ser usadas para calcular a verossimilhança e esta irá desempenhar um alto grau de influência no exercício de estimação, é importante optar por um método que seja o mais preciso possível. Não obstante, destaca-se que além do método ser preciso, é importante também que ele seja veloz, uma vez que a função de verossimilhança irá ser calculada diversas vezes para diferentes conjuntos de valores para os parâmetros do modelo. Há uma grande gama de métodos para aproximar um modelo DSGE de forma não linear, onde cada um deles apresenta vantagens e desvantagens, como mostra Judd (1998). Adicionalmente, o método de solução não linear pode ser baseado em uma aproximação local ou global. O método usualmente utilizado para a solução de modelos dinâmicos é o método de perturbação, o qual constrói uma expansão de séries de Taylor das funções de política dos agentes ao redor do estado estacionário da economia e de um parâmetro de perturbação. Contudo, como argumenta Aruoba et al. (2006), uma vez que se trata de um método de aproximação local, ele só é satisfatório ao redor do estado estacionário; ou seja, isso pode se tornar um problema nos casos em que a economia está sujeita a grandes choques ou se encontra em épocas de crise (por exemplo, crise de 1929 ou a crise financeira de 2008). Por sua vez, os métodos globais são considerados mais robustos e os mais famosos são os métodos de projeção, onde as funções de política correspondentes à solução do modelo são representadas como uma combinação linear de funções base previamente conhecidas. Como exemplo, tem-se o método dos elementos finitos, interação da função valor e os métodos espectrais baseado em polinômios de Chebyshev¹¹.

Em suma, o método de solução não linear escolhido para ser usado no trabalho é um método de perturbação de segunda ordem devido as boas propriedades em termos de precisão e de velocidade reportadas em Aruoba et al. (2006). Além disso, Moura (2010) testa, através de um modelo simples de Ciclos Reais de Negócios, diversos métodos de aproximação não linear e argumenta que os métodos globais parecem ser o melhor método de aproximação; porém, o autor alerta que sua implementação é demasiadamente complicada e mais lenta que os métodos de perturbação. Então, de acordo com o trabalho citado, os métodos de perturbação parecem entregar um bom *trade-off* entre programação, tempo de computação e precisão na aproximação. Portanto, apesar dos métodos de perturbação de segunda ordem não apresentarem o melhor resultado de acurácia quando a não linearidade do modelo é maior, esse método parece ser o mais atrativo, uma vez que é o mais simples de implementar e o mais rápido, o que é um fato importante quando se trabalha com modelos DSGE, onde a cada conjunto de valores de parâmetros estimados, o modelo deverá ser solucionado tantas vezes for necessário até que ele convirja.

Então, com base em Schmitt-Grohé e Uribe (2004), o conjunto das condições de equilíbrio da maioria dos modelos DSGE podem ser denotados como:

$$E_t g(Y_{t+1}, Y_t, S_{t+1}, x_t) = 0, \quad (29)$$

onde E_t é o operador de expectativas condicionado na informação disponível no tempo t . O vetor das variáveis predeterminadas x_t é do tamanho $n_x \times 1$ e o vetor das variáveis que não são pré-determinadas; ou seja, y_t , é do tamanho $n_y \times 1$. Define-se $n = n_x + n_y$. Por sua vez, a função g mapeia $\mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$ em \mathbb{R}^n . Além disso, o vetor de estados x_t pode ser particionado como:

¹⁰ Aruoba et al (2013) mostraram que a introdução dessas assimetrias nos custos de ajustamento de preços e de salários no modelo DSGE conseguem explicar bem as não linearidades observadas nos preços e nos salários da economia dos Estados Unidos na amostra selecionada pelos autores.

¹¹ Judd (1998); Miranda e Fackler (2002); DeJong e Dave (2007); e Aruoba et al. (2006) são uma boa literatura para estudar tais métodos. Por sua vez, para uma leitura acerca de métodos de perturbação, recomenda-se Judd e Guu (1997); Kim, Kim, Schumburg e Sims (2003); Schmitt-Grohé e Uribe (2004); e Gomme e Klein (2008).

$$x_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

onde $x_{1,t}$ denota as variáveis de estado endógenas pré-determinadas e o vetor $x_{2,t}$ as variáveis de estado exógenas; ou seja, os choques atingindo a economia. De acordo com os autores, a solução do modelo na equação (29) é dada da seguinte forma:

$$y_t = h_k(x_t, \sigma), \quad (31)$$

$$x_{t+1} = f_k(x_t, \sigma) + \aleph \sigma \varepsilon_{t+1}, \quad (32)$$

onde h_k mapeia $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^+$ em \mathbb{R}^{n_y} e f_k mapeia $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^+$ em \mathbb{R}^{n_x} . A matriz \aleph é de ordem $n_x \times n_\varepsilon$ e é dada por $\aleph = [\emptyset \quad \tilde{\aleph}]'$. O objetivo então é encontrar uma aproximação de segunda ordem das funções h_k e f_k ao redor do estado estacionário não estocástico, $x_t = \bar{x}$ e $\sigma = 0$ ¹².

3. Método de Estimação Não Linear

Dada a não linearidade gerada pelo modelo DSGE apresentado na seção anterior, em conjunto com o uso de um método de solução não linear, o uso do tradicional Filtro de Kalman não é mais possível. Diante disso, há a necessidade de encontrar um ferramental estatístico que seja robusto e ao mesmo tempo capaz de estimar o modelo DSGE não linear. A proposta do presente trabalho é o uso de Métodos Sequenciais de Monte Carlo que, apesar de serem mais difíceis de serem implementados e também mais custosos computacionalmente, oferecem a possibilidade e a vantagem de estimar modelos que geram não linearidades que são verificadas nos dados; ou seja, permitem ao pesquisador lidar com modelos mais realistas.

Adicionalmente, estudos empíricos mostram que modelos não lineares fornecem estimativas mais precisas dos parâmetros estruturais em modelos DSGE. Alguns autores relataram um desempenho superior nas estimativas de modelos não lineares comparadas as estimativas da versão do modelo linearizado. Como exemplo, podemos citar: Villaverde e Ramírez (2005) que estimam um modelo de Crescimento Neoclássico; An e Shorfheide (2007) que estimam um modelo Novo Keynesiano com custos de ajustamento quadráticos para preços e Amisano e Tristani (2010) que estimam um modelo baseado no modelo de Christiano et al. (2005). Todos esses autores utilizam o Filtro de Partículas tradicional ou alguma extensão deste. Assim, aqui será feita uma discussão acerca dos Métodos Sequenciais de Monte Carlo.

3.1. Estimação Bayesiana

Os métodos Bayesianos fornecem uma rica abordagem para a estimação de problemas de estado dinâmicos. Tal abordagem está baseada na tentativa de construir a função densidade de probabilidade (pdf) do estado levando-se em consideração todas as informações disponíveis até o momento da estimação. Para um problema mais específico como é o caso da estimação gaussiana-linear, a pdf necessária permanece gaussiana para cada interação do filtro e o filtro de Kalman reproduz e atualiza a média e a covariância da distribuição. Por outro lado, para problemas não lineares e/ou não gaussianos, não há uma expressão analítica geral (forma fechada) para a pdf necessária.

Para deduzir o estimador bayesiano de estados, este trabalho baseia-se no trabalho de Gordon, Salmond e Smith (1993), o qual se preocupa com o problema de estimação em tempo discreto. Para isso, os autores consideram que o vetor de estados $x_k \in \mathbb{R}^n$ se movimenta de acordo com o seguinte modelo¹³:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k), \quad (33)$$

¹² Para mais detalhes, ver Schmitt-Grohé e Uribe (2004), onde os autores apresentam uma exposição completa.

¹³ Perceba que o sistema formado pelas equações (31) e (32) na seção anterior pode ser convertido na forma geral apresentada pelas equações (33) e (34) desta seção.

onde $f_k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função de transição e $w_k \in \mathbb{R}^m$ é uma sequência de ruído branco independente com média zero dos estados passados e atuais. Assume-se que a pdf de w_k é conhecida. Além disso, em tempo discreto, medidas $y_k \in \mathbb{R}^p$ tornam-se disponíveis. Essas medidas são relacionadas ao vetor de estados pela equação de medida dada por:

$$y_k = h_k(x_k, v_k), \quad (34)$$

onde $h_k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p$ é a função de medida e $v_k \in \mathbb{R}^r$ é outra sequência de ruído branco independente com média zero dos estados passados e atuais com pdf conhecida. Assume-se que a pdf inicial do vetor de estado $p(x_1|D_0) \equiv p(x_1)$ está disponível, assim como as formas funcionais f_i e h_i para $i = 1, \dots, k$. Por sua vez, a informação disponível até o período k é o conjunto de medidas $D_k = \{y_i: i = 1, \dots, k\}$.

O objetivo do estimador bayesiano é construir a pdf do vetor de estados x_k dada todo o conjunto de informação disponível; ou seja, $p(x_k|D_k)$. A princípio, essa pdf pode ser obtida de maneira recursiva em dois estágios: predição e atualização. Supõe-se que a pdf $p(x_{k-1}|D_{k-1})$ necessária no período $k - 1$ está disponível. Se isso é verdade; então, é possível obter a pdf a priori do estado no período k , utilizando-se o sistema formado pelas equações (33) e (34).

$$p(x_k|D_{k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|D_{k-1}) dx_{k-1}. \quad (35)$$

Aqui, o modelo probabilístico da evolução do estado, $p(x_k|x_{k-1})$, a qual é um modelo de Markov, é definido pelo sistema de equações e pelas estatísticas conhecidas de w_{k-1} .

$$p(x_k|x_{k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1}, w_{k-1})p(w_{k-1}|x_{k-1}) dw_{k-1}.$$

Uma vez que por suposição $p(w_{k-1}|x_{k-1}) = p(w_{k-1})$, tem-se que:

$$p(x_k|x_{k-1}) = \int \delta(x_k - f_{k-1}(x_{k-1}, w_{k-1})) x p(w_{k-1}) dw_{k-1}, \quad (36)$$

onde $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac. Essa função delta surge porque caso x_{k-1} e w_{k-1} forem conhecidos; então, x_k é obtido através de uma relação puramente determinística - como é o caso da equação (33). Assim, no período k uma medida y_k torna-se disponível e pode ser utilizada para atualizar a *posteriori* via regra de Bayes:

$$p(x_k|D_k) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|D_{k-1})}{p(y_k|D_{k-1})}, \quad (37)$$

onde o vetor normalizado é dado por:

$$p(y_k|D_{k-1}) = \int p(y_k|x_k)p(x_k|D_{k-1}) dx_k. \quad (38)$$

A pdf condicional de y_k dado x_k , $p(y_k|x_k)$, é definida pela equação de medida e pelas estatísticas conhecidas de v_k

$$p(y_k|x_k) = \int \delta(y_k - h_k(x_k, v_k))p(v_k) dv_k. \quad (39)$$

Na equação de atualização, equação (37), a medida y_k é usada para modificar a *prior*, prevista pelos períodos anteriores para obter a *posterior* do estado requerida.

As relações recorrentes nas equações (35) e (37) constituem a solução formal para o problema de estimação recursiva bayesiana. Contudo, Gordon et al. (1993), alertam que uma solução analítica para esse problema somente é possível para uma escolha relativamente pequena e restrita de sistema e

modelos de medida, sendo o mais importante o filtro de Kalman¹⁴, o qual é obrigado a assumir que as formas funcionais f_k e h_k do estado x_k sejam lineares e que; além disso, exige que tanto w_k quanto v_k sejam aditivas, independentes e gaussianas com variâncias conhecidas. Contudo, como destacam os autores, tais suposições não são muito realistas e; assim, não são razoáveis para diversas aplicações no mundo real. Em decorrência disso, há a necessidade de se construir um método estatístico mais refinado que admita seu uso em sistemas não lineares e; assim, permita que os modelos possam ser construídos de maneira mais realista.

Há algumas alternativas para lidar com esse problema, entre elas duas alternativas que aprimoram o tradicional Filtro de Kalman, com o objetivo de melhorar a estimação de sistemas não lineares, o Extended Kalman Filter (EKF) e o Unscented Kalman Filter (UKF). De acordo com Simon (2006), o EKF é o algoritmo de estimação de estados mais amplamente aplicado para sistemas não lineares. Contudo, o autor alerta que esse filtro pode ser complicado de ajustar e, muitas vezes, fornece estimativas não confiáveis nos casos em que a não linearidade do sistema é severa. Isso ocorre porque tal filtro conta com a linearização para propagar a média e a covariância do estado. Por sua vez, o UKF proporciona melhorias significativas na precisão da estimativa sobre o EKF; porém, aquele ainda é apenas um estimador não linear aproximado. De outra forma, o EKF calcula a média de um sistema não linear com precisão de primeira ordem, enquanto que o UKF melhora isso ao fornecer uma estimativa com precisão de ordem superior. Entretanto, Simon (2006), comenta que o uso desses filtros simplesmente adia a divergência inevitável que ocorrerá quando o sistema de medição não linear se tornar muito grave.

Assim, o método utilizado nesse trabalho, que é o Filtro de Partículas (estimador de estados completamente não linear), e apresentado na próxima subseção é proposto com a intenção de melhorar a estimação dos modelos DSGE e; assim, deixar esses modelos teóricos mais perto da realidade observada nos dados econômicos.

3.2. Filtro de Partículas

Aqui será apresentado o Filtro de Partículas – também conhecido como Métodos Sequenciais de Amostragem por Importância ou, simplesmente, como Métodos Sequenciais de Monte Carlo. Este é um estimador numérico de estados completamente não linear e que pode ser utilizado para estimar qualquer modelo em formato de estado de espaço. Segundo Simon (2006), Filtro de Partículas, ou Filtragem de Monte Carlo, é uma abordagem estatística de “força bruta” de estimação que frequentemente funciona bem para problemas que são difíceis de lidar com o filtro de Kalman convencional; ou seja, sistemas que são altamente não lineares.

A origem do filtro de partículas está no trabalho de Metropolis e Ulam (1949), o qual descreve o problema do tratamento matemático aos fenômenos físicos. De acordo com os autores, problemas envolvendo apenas algumas partículas, através do estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias, foram estudados em mecânica clássica. Contudo, argumentam os autores, para a descrição de sistemas que apresentam um número grande de partículas, há a necessidade de uma técnica completamente diferente, chamada de método da mecânica estática (*method of statistical mechanics*), onde nessa nova abordagem, concentra-se no estudo das propriedades de um conjunto de partículas e não mais na observação das partículas individuais. Vale notar que o Filtro de Partículas é uma evolução do algoritmo SIS (amostragem por importância sequencial). Este é considerado a base para a literatura acerca de Métodos Sequenciais de Monte Carlo que se seguiu. De acordo com Arulampalam et al. (2002), o algoritmo SIS sofre do problema chamado de degeneração da amostra, onde após algumas interações, apenas uma entre todas as partículas iniciais tenha um peso não negligenciável e, com isso, todas as estimativas de Monte Carlo das integrais sejam realizadas com uma amostra de tamanho um. Por sua vez, o Filtro de Partículas que foi proposto por Gordon et al. (1993) e Kitagawa (1996) é considerado o método de Monte Carlo padrão. Este filtro, que mais tarde Arulampalam et al. (2002) denominou de Filtro de Partículas Genérico, adiciona um passo de reamostragem no algoritmo, o que ajuda a reduzir o problema de degeneração da amostra verificado no algoritmo SIS. Apesar do seu uso difundido em

¹⁴ Hamilton (1989) faz uma apresentação detalhada acerca do Filtro de Kalman.

diversos outros campos de pesquisa¹⁵, apenas recentemente o Filtro de Partículas começou a ser utilizado como ferramenta estatística para calcular a verossimilhança em modelos não lineares em economia. Por exemplo, Kim et al. (1998) e Pit e Shepard (1999) aplicaram tal método em modelos de volatilidade estocástica. Porém, para aplicações envolvendo modelos DSGE, o pioneiro foi Villaverde e Ramírez (2005). Ao abrir as portas para a implementação do Filtro de Partículas na estimação de modelos macroeconômicos, outros trabalhos semelhantes foram incorporados na literatura de modelos DSGE envolvendo Métodos Sequencias de Monte Carlo: An (2005), An e Schorfheide (2007), Villaverde e Ramírez (2007), Flury e Shepard (2011), Amisano e Tristani (2010), DeJong et al. (2009), Strid (2006), Andreasen (2011), Fasolo (2012) e Aruoba et al. (2013).

A intuição e as equações derivadas do filtro de partículas são baseadas em Simon (2006). No início de cada etapa de estimação, gera-se aleatoriamente um dado número N de vetores de estado baseado na função densidade de probabilidade inicial (pdf), $p(x_0)$, a qual se assume que seja de conhecimento prévio. Tais vetores de estado são conhecidos como partículas e são denotadas por $x_{0,i}^+$ ($i = 1, \dots, N$). A cada passo de tempo $k = 1, 2, \dots$, propagam-se as partículas para o próximo passo de tempo utilizando-se a equação $f(\cdot)$:

$$x_{k,i}^- = f_{k-1}(x_{k-1,i}^+, w_{k-1}^i) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (40)$$

onde cada vetor de erros w_{k-1}^i é gerado aleatoriamente baseado na pdf previamente conhecida de w_{k-1} . Após obter a medição no tempo k , calcula-se a correspondente verossimilhança condicional de cada partícula $x_{k,i}^-$; ou seja, avalia-se a pdf $p(y_k | x_{k,i}^-)$. Isso pode ser feito quando se conhece a equação de mensuração não linear e a pdf da medição de erros. Por exemplo, se uma equação de mensuração m -dimensional é dada por $y_k = h(x_k) + v_k$ com $v_k \sim N(0, R)$; então, uma correspondente verossimilhança q_i que a mensura é igual a uma mensuração específica y^* , dado a premissa que x_k seja igual à partícula $x_{k,i}^-$, pode ser computado como a seguir:

$$\begin{aligned} q_i &= P[(y_k = y^*)(x_k = x_{k,i}^-)] \\ &= P[v_k = y^* - h(x_{k,i}^-)] \sim \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |R|^{1/2}} \exp\left(\frac{-[y^* - h(x_{k,i}^-)]^T R^{-1} [y^* - h(x_{k,i}^-)]}{2}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

O símbolo, \sim , na equação acima, significa que a probabilidade não é realmente dada pela expressão do lado direito, mas sim que a probabilidade é diretamente proporcional ao que está do lado direito da equação. Assim, se essa equação é usada para todas as partículas $x_{k,i}^-$ ($i = 1, \dots, N$); em seguida, as correspondentes verossimilhanças de que o estado é igual a cada partícula estarão corretas. Agora, normalizam-se as correspondentes verossimilhanças obtidas na equação (41) como a seguir.

$$q_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^N q_j}. \quad (42)$$

Dessa maneira garante-se que a soma de todas as verossimilhanças sejam iguais a um. O próximo passo é fazer uma nova amostragem das partículas a partir das verossimilhanças calculadas. Ou seja, calcula-se um novo conjunto de partículas $x_{k,i}^+$ que é gerada aleatoriamente a partir das correspondentes verossimilhanças q_i . Isso pode ser realizado de diversas maneiras. Uma forma simples; porém, não necessariamente eficiente, é a mostrada a seguir: Para $i = 1, \dots, N$, efetua-se dois passos,

1. Gera-se um número aleatório r que é distribuído uniformemente no intervalo $[0, 1]$.

¹⁵ Ver Cox (1996) para uma aplicação do Filtro de Partículas na mobilidade de robôs.

2. Acumulam-se as verossimilhanças q_i , uma de cada vez, até que a soma acumulada seja maior do que r . Isto é, $\sum_{m=1}^{j-1} q_m < r$; porém, $\sum_{m=1}^j q_m \geq r$. A nova partícula $x_{k,i}^+$ é; então, determinada pela velha partícula $x_{k,i}^-$.

Essa ideia de reamostragem é justificada de maneira mais formal por Smith e Gelfand (1992), onde é mostrado que a pdf conjunta das novas partículas $x_{k,i}^+$ tende para a pdf $p(x_k|y_k)$ quando o número de amostras N se aproxima do ∞ .

Agora, tem-se um conjunto de partículas $x_{k,i}^+$, as quais são distribuídas de acordo com a pdf $p(x_k|y_k)$. Há a possibilidade de se calcular qualquer medida estatística desejada dessa pdf. Por exemplo, para calcular o valor de $E(x_k|y_k)$; então, pode-se aproximá-la como a média algébrica das partículas:

$$E(x_k|y_k) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{k,i}^+. \quad (43)$$

Por fim, o filtro de partículas pode ser resumidamente descrito pelos seguintes passos:

- (a) Seja o seguinte sistema no formato de espaço de estados:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f_k(x_k, w_k) \\ y_k &= h_k(x_k, v_k), \end{aligned} \quad (44)$$

onde $f_k(\cdot)$ e $h_k(\cdot)$ são as equações que formam o sistema não linear, k é um índice de tempo, x_k é o vetor de estado, w_k é o vetor de erros da equação de processo, y_k é o vetor de medida e v_k é o vetor de erros da equação de medida. Além disso, w_k e v_k são processos ruído branco independentes com pdf's conhecidas.

- (b) Assumindo-se que a pdf do estado inicial $p(x_0)$ seja conhecida, gera-se aleatoriamente N partículas iniciais com base na pdf $p(x_0)$. Essas partículas são denotadas por $x_{0,i}^+$ ($i = 1, \dots, N$). O parâmetro N é escolhido pelo pesquisador, o qual enfrenta um *trade-off* entre esforço computacional e precisão na estimativa.

- (c) Para os períodos $k = 1, 2, \dots$ realizam-se os seguintes procedimentos:

- a. Realize o passo de propagação do tempo para obter partículas *a priori* $x_{k,i}^-$ utilizando a equação de processo a qual é conhecida e a pdf que também é conhecida do processo de ruído:

$$x_{k,i}^- = f_{k-1}(x_{k-1,i}^+, w_{k-1}^i) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (45)$$

onde cada vetor de erros w_{k-1}^i é gerado aleatoriamente com base na pdf conhecida de w_{k-1} .

- b. Calcule a verossimilhança q_i correspondente a cada partícula $x_{k,i}^-$ condicionada ao vetor de medida y_k . Isso é feito avaliando-se a pdf $p(y_k|x_{k,i}^-)$ com base na equação de medida não linear e na pdf dos erros da equação de medida.

- c. Normalize as verossimilhanças correspondentes obtidas nas etapas anteriores como a seguir:

$$q_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^N q_j}. \quad (46)$$

Agora a soma de todas as verossimilhanças é igual a um.

- d. Gera-se um conjunto de partículas a *posteriori* $x_{k,i}^+$ com base nas verossimilhanças q_i correspondentes. Esse passo é conhecido como reamostragem (resampling step).

Agora que se obteve um conjunto de partículas $x_{k,i}^+$ as quais são distribuídas de acordo com a pdf $p(x_k|y_k)$, o pesquisador está habilitado a calcular medidas estatísticas (geralmente média e covariância) desejadas dessa pdf.

Por fim, a ideia simples que está por trás do Filtro de Partículas é que as partículas criadas a partir da distribuição $p(x_0)$, as quais não tragam contribuição para caracterizar o vetor de estado em cada ponto do tempo devem ser eliminadas, sobrando apenas àquelas partículas que apresentem um peso maior na distribuição. Assim, o filtro concentra apenas as partículas ao redor das regiões relevantes do estado de espaço do modelo. Assim, no passo de amostragem está o cerne do Filtro de Partículas, baseado em uma pequena modificação no padrão do Método de Amostragem por Importância (SIS). No caso da amostragem por importância padrão cada partícula gerada no passo de projeção seria amostrada com a mesma probabilidade. Entretanto, é sabido na literatura Sequencial de Monte Carlo que, quando $t \rightarrow \infty$, há um problema conhecido como degeneração da amostra, onde exceto para uma única partícula específica, todos os outros pesos de importância convergem para zero. Além disso, mesmo a única partícula com peso igual a um não, necessariamente, fornece a melhor caracterização do vetor de estado. Portanto, a alteração proposta e depois utilizada na versão do Filtro de Partículas por Villaverde e Ramírez (2005) é de suma importância para o bom funcionamento do Filtro de Partículas.

3.3. Problemas Envolvendo o Filtro de Partículas e suas Alternativas

Na literatura de Métodos Sequenciais de Monte Carlo é destacado que o Filtro de Partículas padrão sofre de um problema conhecido como “empobrecimento da amostra”¹⁶, o que pode ser considerado um problema de degeneração da amostra mais suavizado; ou seja, menos danoso ao método. O que ocorre é que, a amostra de um número muito grande de partículas não irá degenerar-se como ocorre com o algoritmo SIS; porém, esse número irá reduzir-se para apenas alguns valores de partículas distintos. O empobrecimento da amostra ocorre especialmente quando há *outliers* nos dados utilizados ou em situações em que a equação de medida é bastante informativa a respeito dos estados. Com isso, Pitt e Shephard (1999) comentam que a presença de *outliers* nos dados geralmente requer valores maiores no número de partículas a fim de obter uma boa aproximação da densidade. Além disso, como comenta Moura (2010), o amostrador por importância usado para aproximar as integrais no processo de filtragem apenas incorpora as informações contidas nas variáveis observadas disponíveis em $t - 1$, não utilizando as informações do período t . Diante disso, foram propostas algumas extensões do Filtro de Partículas padrão para incorporar informações contidas no tempo t e, com isso, torná-lo mais eficiente. Por exemplo, o Filtro de Partículas Auxiliar proposto por Pitt e Shephard (1999), o Filtro de Partículas Condicional apresentado por Amisano e Tristani (2010). Entretanto, é importante ressaltar que a consistência do Filtro de Partículas baseia-se principalmente no número de partículas utilizadas para aproximar a função de densidade de probabilidade das variáveis de estado em cada período de tempo. Contudo, há de destacar que há um *trade-off* entre a precisão do filtro e o tempo necessário para executar o procedimento. Fasolo (2012) mostra que os valores do log da verossimilhança se tornam mais precisos à medida que o número de partículas aumenta. Adicionalmente, o autor compara a performance entre o

¹⁶ Para calcular a ineficiência do Filtro de Partículas (a gravidade do problema do empobrecimento da amostra), bem como calcular a qualidade de aproximação da densidade dos estados com o Filtro de Partículas, Arulampalam et al. (2002) sugere estimar o chamado tamanho efetivo da amostra. A ideia é usar a variância dos pesos por importância como ferramenta para analisar a qualidade da distribuição. Essa estatística é dada por:

$$N^{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (q_i^t)^2}.$$

Filtro de Partículas padrão e o Auxiliar e conclui que, apesar do segundo fornecer um bom desempenho quando o número de observações é grande e o número de partículas é relativamente pequeno, o Filtro de Partículas padrão é significativamente menos demandante em termos computacionais e; assim, esse filtro tende a apresentar um melhor desempenho com um grande número de partículas se comparado com o Filtro Auxiliar.

Portanto, há algumas extensões do Filtro Partículas padrão que procuram melhorar o desempenho deste. Contudo, o Filtro de Partículas proposto por Villaverde e Ramírez (2005 e 2007) ainda é uma ferramenta estatística robusta que apresenta resultados superiores se comparado ao tradicional Filtro de Kalman como pode ser verificado nos trabalhos de Villaverde e Ramírez (2005), An e Schorfheide (2007) e Amisano e Tristani (2010).

3.4. Simulações para a *Posterior*

Após obter a verossimilhança, esta pode ser utilizada em um algoritmo bayesiano que simule as posteriores dos parâmetros. No presente trabalho, utiliza-se o algoritmo chamado Randow-Walk Metropolis (RWM) apresentado em Chib (2001) e An e Schorfheide (2007). De forma resumida, utilizam-se Métodos Sequenciais de Monte Carlo para calcular a verossimilhança do modelo DSGE e então essa verossimilhança é plugada em um processo de Cadeia de Markov de Monte Carlo (MCMC).

A fim de realizar esse processo com êxito, primeiramente estima-se a versão linearizada do modelo DSGE apresentado na seção 2 usando o algoritmo RWM. Através do uso da mesma matriz de covariância para a distribuição proposta para gerar as partículas, tal como para o modelo DSGE linearizado, nós então rodamos o algoritmo RWM baseado na função de verossimilhança associada com a aproximação de segunda ordem do modelo DSGE. Vale destacar que a matriz de covariância da distribuição proposta é dimensionada de tal modo que o algoritmo RWM tenha uma taxa de aceitação de aproximadamente 50%. Utilizam-se 100.000 partículas para aproximar a função de verossimilhança do modelo DSGE não linear, enquanto que a variância dos erros de mensuração é definida como 10% da variância da amostra das observações. Por fim, geram-se 275.000 simulações da distribuição a *posteriori* do modelo DSGE não linear. Vale destacar que as primeiras 75.000 simulações são descartadas, sendo reportados os resultados estatísticos advindos das simulações restantes.

Acrescenta-se que o número de partículas escolhido no presente trabalho é bem maior do que os verificados em trabalhos anteriores. Por exemplo, Villaverde e Ramírez (2005) utilizam 60.000 partículas no Modelo de Crescimento Neoclássico. Depois, os mesmo autores usam uma versão estendida desse modelo e optam por utilizar 80.000 partículas. Por sua vez, An e Schorfheide (2007) estimam um modelo Novo Keynesiano com 40.000 partículas. Por fim, Aruoba et al. (2013) usam 80.000 partículas para calcular a função de verossimilhança de um modelo DSGE com custos de ajustamento assimétricos nos preços e nos salários. Portanto, nesse trabalho optou-se por utilizar a técnica da “força-bruta” a fim de contornar o problema de empobrecimento da amostra comentado anteriormente. Apesar do custo maior em termos computacional, a proposta de elevar o número de partículas ajuda a minimizar o problema de empobrecimento da amostra.

4. Estimação e Resultados

Uma vez discutidos os métodos de solução do modelo DSGE e também a metodologia de estimação, na presente seção, parte-se para os resultados empíricos do modelo proposto. O modelo apresentado na seção 2 é solucionado através de um método de solução não linear e seus parâmetros estruturais são; então, estimados com o auxílio do Filtro de Partículas. Porém, são apresentados brevemente também os resultados da estimação via Filtro de Kalman da versão linearizada do modelo. Contudo, não são realizadas comparações sobre o desempenho entre os dois filtros como ocorrem em outros trabalhos, por exemplo, An e Schorfheide (2007) e Amisano e Tristani (2010). Sendo assim, na primeira parte da seção, mostram-se os dados e as distribuições a *priori* utilizados. Na segunda parte, apresentam-se as distribuições a *posteriori* resultantes da estimação, comentando-se os resultados e comparando os parâmetros obtidos com outros resultados selecionados na literatura. Por fim, o capítulo é concluído com a análise das funções de impulso resposta com o objetivo de estudar a dinâmica da

economia na sua versão linear (rigidez simétrica) e na sua versão não linear (rigidez assimétrica) quando se realiza um choque temporário de política monetária e fiscal.

4.1. Dados Utilizados e Distribuições a *Priori*

Os dados do presente trabalho são de periodicidade trimestral e compreendem o período entre 2000:1 e 2014:4, resultando em 60 observações. Vale destacar que a escolha do período justifica-se pela mudança para o regime de metas de inflação em 1999. Foram utilizadas quatro variáveis macroeconômicas observadas: produto, inflação, taxa de juros e salários. Logo, utilizaram-se as séries do PIB, do IPCA e da taxa de juros Selic, todos esses indicadores divulgados pelo IBGE. Por sua vez, a variável referente ao mercado de trabalho foi o rendimento médio, o qual é divulgado pelo DIEESE. Esse indicador utiliza o comportamento da região metropolitana de São Paulo como *proxy* para a dinâmica nacional. A opção por essa série ao invés da série do IBGE se dá em decorrência da quebra estrutural nessa série em 2002 provocada por mudança metodológica ocorrida naquele ano.

Com relação às *prioris* usadas, estas foram determinadas com base nos estudos econômicos realizados no Brasil e no caso dos parâmetros que não foram estimados para economia brasileira, optou-se por seguir a mesma *priori* do modelo original utilizado. Para o parâmetro β seguiu-se o trabalho de Shorfheide (2000). Para a média do parâmetro ν manteve-se o valor 2. Para τ selecionamos 1,30, o qual é o empregado no modelo SAMBA de Castro et al. (2011). Nos parâmetros relacionados à autoridade monetária (ρ_r , Ψ_2 e Ψ_2), seguiram-se os mesmos valores do modelo SAMBA. Para os parâmetros de persistência dos choques (ρ_a , ρ_g e ρ_p), a *priori* foi de 0,85. Já para os parâmetros de rigidez são mantidos os mesmos valores verificados em Aruoba et al. (2013), uma vez que não há evidências empíricas para tais parâmetros na economia brasileira. Por fim, para todos os desvios padrão foi escolhida a distribuição Gama Inversa. As tabelas 4.1 e 4.2 apresentam um resumo das *prioris* usadas para os parâmetros.

4.2. Resultados da Estimação: Linear e Não Linear

Primeiramente, são apresentados brevemente os resultados da estimação feita com a ajuda do filtro de Kalman. O primeiro passo foi obter a solução do modelo apresentado na seção 2 por meio de uma aproximação linear via expansões de Taylor ou aproximações logarítmicas. Após realizar a linearização, escreve-se a solução do modelo em desvio dos valores de estado estacionário das variáveis e ; então, obtém-se o modelo no formato de equações a diferença com expectativas racionais. O próximo passo é colocar essa solução na sua representação de estado de espaço, onde se avalia a função de verossimilhança via filtro de Kalman. Os parâmetros estimados através desse método não serão analisados profundamente, pois o foco do trabalho é estudar o resultado do modelo não linear. Entretanto, como pode ser verificado na tabela 4.1, os parâmetros estimados parecem estar em linha com os resultados encontrados para a economia brasileira, com exceção do parâmetro de suavização da taxa de juros que parece ter ficado bem abaixo dos valores encontrados nos trabalhos de Castro et al (2011) e Sin e Gaglianone (2006). Por sua vez, o valor achado para β foi menor do que o valor costumeiramente calibrado para o Brasil (em torno de 0,989).

Tabela 4.1 – Priors e Posteriores do Modelo Linearizado Estimado via Filtro de Kalman

Parâmetro	Priori			Posteriori		
	Média	Desvio Padrão	Distribuição	Média	Intervalo de Confiança a 90%	
β	0,9930	0,0200	Beta	0,9796	0,9763	0,9827
τ	1,7000	0,1000	Normal	1.8494	1,6742	2,0316
ν	2,0000	0,7500	Normal	0.2457	0,1801	0,3223
$k(\varphi_p)^{17}$	0,3000	0,2000	Gama	0,0177	0,0082	0,0277
φ_w	15,000	7,5000	Gama	3,6561	2,2331	6,3084
Ψ_p	-	-	-	-	-	-
Ψ_w	-	-	-	-	-	-
Ψ_1	1,7000	0,1000	Normal	1,7767	1,5835	1,9567
Ψ_2	0,2000	0,1000	Gama	0,2312	0,1701	0,2935
ρ_R	0,5000	0,2000	Beta	0,3930	0,3006	0,4825
ρ_g	0,8500	0,1000	Beta	0,9835	0,9479	0,9901
ρ_a	0,8500	0,1000	Beta	0,8063	0,7832	0,8396
ρ_p	0,8500	0,4000	Beta	0,5618	0,4262	0,7150

Fonte: Elaborada pelos Autores

Contudo, a tarefa mais importante a ser feita nessa seção é analisar os resultados da estimação feita com a ajuda do filtro de partículas. Diferentemente do que foi feito anteriormente, o modelo DSGE é resolvido utilizando um método de perturbação de segunda ordem, o qual resulta em uma representação não linear na forma de estado de espaço. Nesse caso, não mais é possível usar o filtro de Kalman para avaliar a função de verossimilhança. A tabela 4.2 apresenta os resultados da estimação através do uso do Filtro de Partículas.

¹⁷ É necessário destacar que no caso da versão log-linearizada do modelo DSGE, o parâmetro φ_p não pode ser identificado; porém, ele está implícito em $k(\varphi_p) = \tau \frac{1-\lambda_{p,t}}{\lambda_{p,t}\pi^2\varphi_p}$ que dá a inclinação da curva de Phillips Novo Keynesiana na versão linearizada do modelo.

Tabela 4.2 – Priors e Posteriores do Modelo Não Linear Estimado via Filtro de Partículas

Parâmetro	Priori			Posteriori		
	Média	Desvio Padrão	Distribuição	Média	Intervalo de Confiança a 90%	
β	0,9930	0,0200	Beta	0,9951	0,9928	0,9972
τ	1,7000	0,1000	Normal	1,8480	1,6828	2,0202
v	2,0000	0,7500	Normal	0,1692	0,1069	0,2392
φ_p	15,000	7,5000	Gama	7,6928	5,3382	10,2143
φ_w	15,000	7,5000	Gama	26,6619	20,2389	36,3142
Ψ_p	-300,00*	300,00*	Uniforme	253,3584	212,6989	290,5934
Ψ_w	-200,00*	200,00*	Uniforme	19,5157	3,2506	40,7773
Ψ_1	1,7000	0,1000	Normal	1,6220	1,4588	1,7920
Ψ_2	0,2000	0,1000	Gama	0,3905	0,3194	0,4628
ρ_R	0,5000	0,2000	Beta	0,7419	0,6495	0,8314
ρ_g	0,8500	0,1000	Beta	0,7219	0,6863	0,7685
ρ_a	0,8500	0,1000	Beta	0,9357	0,9126	0,9690
ρ_p	0,8500	0,4000	Beta	0,7272	0,5916	0,8804

*Limites superior e inferior da distribuição Uniforme

Fonte: Elaborada pelos Autores

A tabela 4.2 resume as estimativas dos parâmetros do modelo solucionado de forma não linear. Vale destacar que, de maneira geral, os parâmetros estimados não diferem substancialmente de valores comumente encontrados na literatura empírica com dados brasileiros. Na primeira parte da tabela 4.2, encontram-se as estatísticas referentes às preferências das famílias. O fator de desconto intertemporal, β , foi de 0,9951, maior do que os valores comumente calibrados (0,989) na economia brasileira nos trabalhos de Castro et al. (2011) e Vasconcelos e Divino (2012). Por sua vez, o parâmetro τ – o qual mede a elasticidade inversa de substituição intertemporal e também é conhecido como coeficiente de aversão ao risco – obteve estimativa de 1,8480, valor mais elevado do que os encontrados nos trabalhos de Portugal e Silva (2011) e Castro et al (2011). Vale destacar que, através da observação de modelos empíricos, tais como os que o Banco Central do Brasil divulga em seus Relatórios Trimestrais de Inflação, o que se percebe é que a taxa de juros acaba gerando um efeito menor sobre a inflação se comparado aos efeitos verificados nos modelos DSGE a partir das funções de impulso e resposta. Por fim, a elasticidade de oferta de trabalho, v , obteve um valor de 0,1692, refletindo a rigidez de salários na especificação do modelo com a introdução dos custos de ajustamento assimétricos nos salários.

Com relação aos coeficientes referentes à política monetária, conclui-se que o Banco Central brasileiro parece dar maior peso para os desvios que ocorrem na inflação do que os desvios no produto. O parâmetro estimado que responde à inflação, Ψ_1 , resultou em 1,6220. O valor foi menor do que o observado no trabalho de Casto et al. (2011), 2,43. Porém, foi superior aos valores encontrados por Sin e Gaglianone (2006), 1,33 e Santos e Kanczuk (2011), 1,50. Por sua vez, a estimação do parâmetro Ψ_2 , que aponta a importância dada pelo Banco Central ao desvio do produto e foi de 0,3905, ficou bastante superior à observada nos trabalhos dos autores citados – 0,16, 0,13 e 0,16, respectivamente. Os parâmetros estimados indicam que, apesar do Banco Central dar maior peso a inflação do que ao produto, no caso do modelo usado aqui, a autoridade monetária dá uma atenção considerável aos desvios verificados no produto, o que ocorre em menor proporção na maioria dos trabalhos empíricos aplicados

para o Brasil. Porém, vale destacar que, de acordo com esse resultado, a autoridade monetária reage ao produto quando este se encontra acima do potencial a fim de evitar uma maior inflação ocasionada por excesso de demanda na economia. Por último, o coeficiente de suavização da taxa de juros, ρ_r , foi de 0,7419, mais baixo do que em Castro et al (2011) e Sin e Gaglione (2006), que encontram 0,79 e 0,8402 respectivamente. Isso indica que a autoridade monetária considera o nível anterior da taxa de juros, para tomar decisões de magnitude de elevação desta. Em outras palavras, o Banco Central costuma manter o nível da taxa de juros estável ao longo do tempo, ao invés de realizar mudanças bruscas. Em resumo, os resultados encontrados aqui indicam que 74% da taxa de juros atual é determinada pelo valor da taxa de juros passada e; com isso, 26% dos desvios que ocorrem na inflação e no produto são ajustados a cada período de tempo.

O choque de crescimento tecnológico é o mais persistente entre os choques exógenos do modelo, ρ_a é aproximadamente 0,94. Por sua vez, o choque relacionado aos gastos do governo, o qual representa no modelo um choque genérico de demanda na economia, é dado por $\rho_g = 0,7219$. Por fim, a persistência do choque na elasticidade da demanda inversa nos bens intermediárias, ρ_p , é 0,73.

Por último, faz-se a análise acerca dos parâmetros de rigidez e de assimetria nas funções de custo de ajustamento de preço e de salários. Os parâmetros que governam a rigidez de preços e de salários, $\varphi_p = 7,6928$ e $\varphi_w = 26,6619$, indicam que a economia brasileira possui rigidez tanto nos preços quanto nos salários. Além disso, os parâmetros mostram que a rigidez é maior nos salários do que nos preços. Entretanto, esse resultado pode ser explicado pelos valores encontrados para os outros parâmetros de rigidez – aqueles que mostram a assimetria na rigidez – a serem apresentados a seguir. Portanto, os resultados mais interessantes e importantes são aqueles dos parâmetros de assimetria nas funções de custos de ajustamento de preço e de salário, uma vez que não foram trabalhados ainda para a economia brasileira e que serão mostrados a seguir. Para os parâmetros Ψ_p e Ψ_w estimou-se 253,3584 e 19,5157, respectivamente. Ao comparar com os resultados encontrados em Aruoba et al. (2013), o que se percebe é um valor mais alto no parâmetro de assimetria de preços ($\Psi_p = 165$) e mais baixo do que o encontrado no parâmetro de assimetria salarial ($\Psi_w = 59$). Por sua vez, comparando o resultado de Kim e Murcia (2009), o parâmetro de salário ficou muito abaixo do encontrado pelos autores ($\Psi_w = 901,4$); porém, no trabalho citado, só se considera que haja assimetria nos salários o que pode ter influenciado no resultado encontrado, bem como os autores estimaram seu modelo DSGE pelo Método dos Momentos Simulado. De maneira geral, as estimativas positivas de $\Psi_p = 253,3584$ e $\Psi_w = 19,5157$ implicam que é mais dispendioso baixar preços e salários do que aumentá-los e; além disso, a assimetria nos preços é mais pronunciada do que nos salários. É possível que esse resultado tenha se refletido no valor dos parâmetros φ_p e φ_w citados anteriormente. Perceba que o valor de φ_p foi muito mais baixo do que φ_w ; por outro lado, o valor de Ψ_p foi muito mais elevado do que Ψ_w . O que esse resultado está mostrando é que a firma ao mudar seu preço, ela sofre um custo real (por exemplo, em termos de bens ou horas trabalhadas) que é identificado pelo parâmetro φ_p , mas como o valor deste foi pequeno, as firmas quando reajustam seus preços decorrem de um custo baixo e o fazem perto do preço eficiente do mercado. Contudo, o que o valor elevado de Ψ_p nos diz é que as firmas quando vão ajustar seus preços o fazem com um custo muito mais elevado quando precisam reduzir os seus preços do que quando vão aumentá-los. A situação inversa ocorre com os salários; ou seja, a rigidez nos salários é elevada, mas a sua assimetria é baixa apesar de que indique que o custo de baixá-los é mais alto. Portanto, encontramos evidências de que tanto os preços quanto os salários na economia brasileira são rígidos e; além disso, estes são mais rígidos para baixo do que para cima. Esse fato pode decorrer principalmente pelos seguintes fatores. No caso dos salários, como é destacado em Camargo (2009), o mercado de trabalho brasileiro tem características peculiares, onde o conjunto legislativo que regula o seu funcionamento é extenso, complicado e demasiadamente detalhista, o que acaba dificultando o “desenho” apropriado dos contratos de trabalho com características distintas daquelas estipuladas na legislação, o que faz a estrutura de contratos de trabalho ser legalmente determinada e de difícil negociação. Com isso, ao definir contratos com cláusulas mais flexíveis do que as existentes na lei, as empresas correm o risco de terem esses contratos declarados ilegais pela justiça do trabalho, o que gera custos elevados. Assim, os salários se tornam rígidos. Por sua vez, a presença de

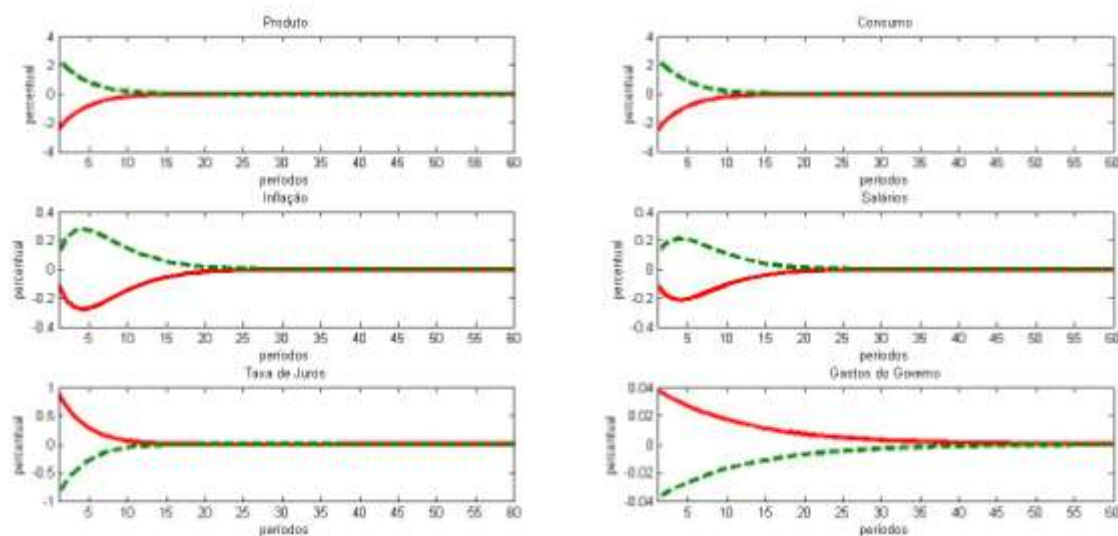
sindicatos fortes na economia nacional pode acabar gerando uma rigidez para baixo nos salários, muitas vezes, não permitindo a redução dos salários dos empregados conforme a produtividade destes. No caso dos preços, há duas situações que podem explicar a rigidez. A primeira decorre da própria rigidez salarial que acaba influenciando nos custos das empresas. Uma vez que os salários são mais rígidos de se ajustarem para baixo, as empresas acabam não podendo ajustar os seus preços de maneira eficiente (pagando ao fator salário a sua respectiva produtividade). Além disso, como destacado anteriormente, as empresas correm o risco de enfrentarem custos elevados ao tentar negociar contratos mais flexíveis do que a lei brasileira determina, correndo o risco de terem esses contratos declarados ilegais, gerando processos onerosos. A segunda situação decorre do fato de que as empresas operam em geral em um mercado que não é completamente competitivo; ou seja, a maioria das empresas possui algum grau de monopólio de seus produtos por esses serem minimamente diferenciáveis dos seus concorrentes. Entretanto, para deixar seus produtos heterogêneos no mercado, as firmas acabam enfrentando custos adicionais, com propaganda e com desenvolvimento do produto que acabam trazendo custos maiores o que acaba se refletindo nos custos totais da empresa, fazendo ela operar com preços mais elevados.

4.3. Análise de Impulso Resposta

Após realizar as estimativas encontradas para os parâmetros estruturais do modelo na subseção anterior, agora o foco é analisar a dinâmica da propagação dos choques na economia com e sem a presença de assimetrias nos custos de ajustamento de preços e de salários. Em outras palavras, olharemos a dinâmica da economia na sua versão linear (simétrica) e na sua versão não linear (assimétrica). Dessa forma, procura-se analisar por meio de funções de impulso e resposta como se propagam e quais são os efeitos de choques na política monetária e nos gastos do governo em relação ao seu equilíbrio de estado estacionário. Em outras palavras, essa seção examina como a economia responde a choques. Começando no estado estacionário, a economia é sujeita a um choque temporário inesperado e; então, as respostas do consumo, produto, taxa de juros, gastos do governo, salários nominais e inflação são plotadas em função do tempo. Note que o choque de política monetária é equivalente a uma redução ou elevação na taxa de juros nominal da economia, enquanto que o choque nos gastos do governo deve ser visto como um choque genérico de demanda na economia.

Antes de partir para a análise das funções de impulso resposta é necessário destacar alguns pontos importantes. Como destacam Gallant et al. (1993) e Koop et al. (1996), no caso de modelos lineares, as respostas a um choque de tamanho ϵ são metade de um choque de tamanho 2ϵ e são também espelhados em relação a um choque de tamanho $-\epsilon$. Assim sendo, qualquer normalização conveniente – por exemplo, $\epsilon = 1$ – acaba resumindo todas as informações relevantes acerca da dinâmica imposta pelo modelo, como pode ser verificado nos gráficos 4.1 e 4.3. Entretanto, como destaca Kim e Murcia (2009), em modelos não lineares, como o que foi apresentado na seção 2, as respostas das variáveis vão depender de ambos – o sinal e o tamanho do choque. Levando isso em consideração, o foco será dado ao modelo não linear, tecendo-se apenas breves comentários acerca da dinâmica do modelo linearizado, bem como a comparação do comportamento de ambos os modelos.

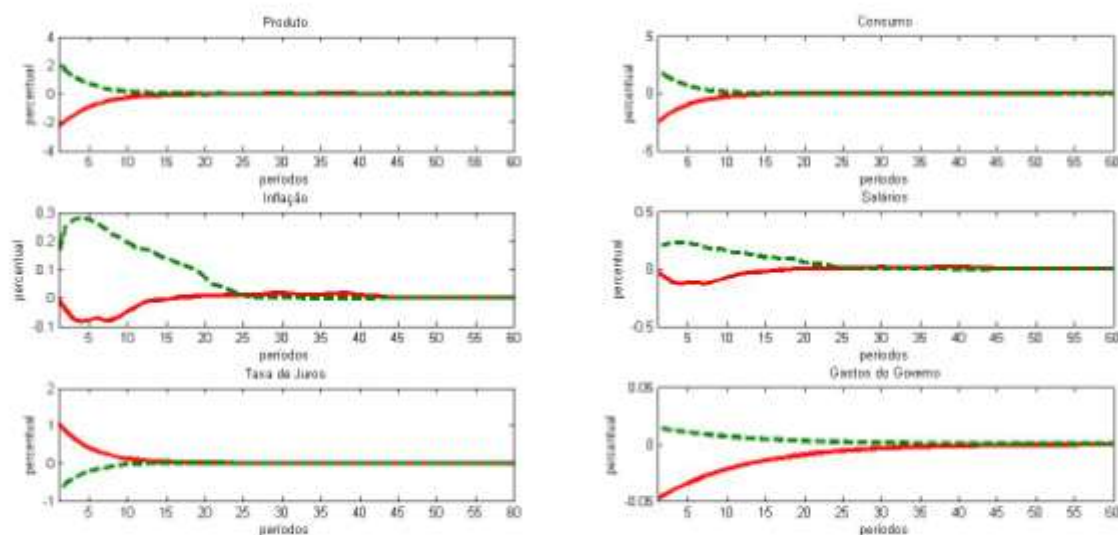
Gráfico 4.1 – Modelo Sem Assimetria: Choque de um Desvio Padrão na Taxa de Juros



Fonte: Elaborada pelos Autores

No gráfico 4.1, pode ser verificada a resposta dinâmica de algumas variáveis selecionadas diante de um choque de política monetária tanto expansionista (reduzindo os juros nominais) quanto contracionista (elevando os juros nominais). A linha vermelha sólida corresponde a uma elevação da taxa de juros nominal, enquanto que a linha verde tracejada se refere a uma acomodação monetária¹⁸. Ao elevar os juros da economia, o consumo privado reduz o que acaba influenciando na queda do produto agregado. Além disso, tanto os preços quanto os salários sofrem uma redução bastante semelhante, voltando para o equilíbrio após 20 períodos. Por sua vez, o governo aumenta os seus gastos a fim de dar estímulos para a economia voltar para o equilíbrio.

Gráfico 4.2 – Modelo Com Assimetria: Choque de um Desvio Padrão na Taxa de Juros



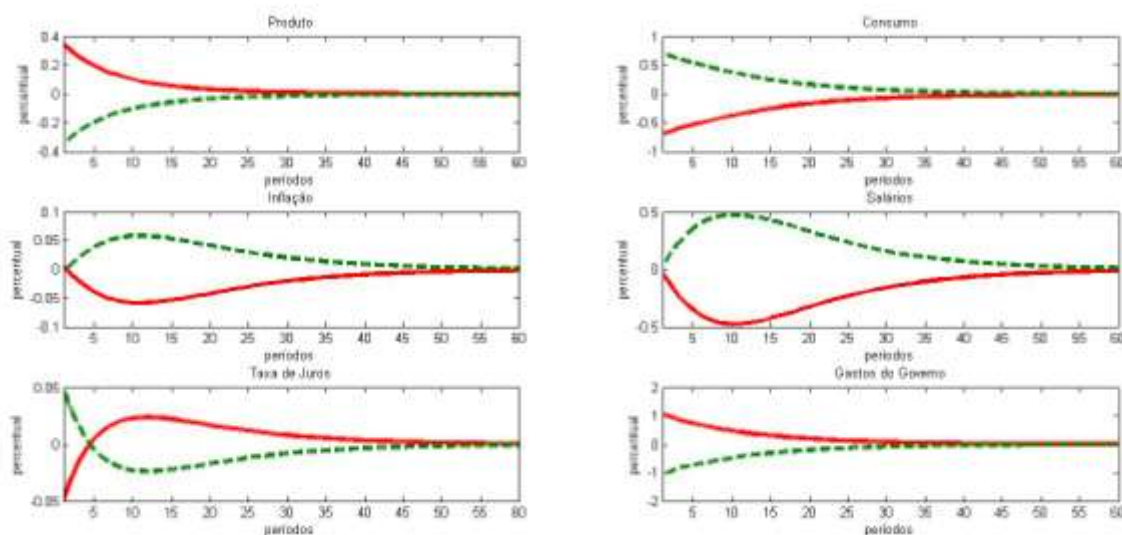
Fonte: Elaborada pelos Autores

No gráfico 4.2, é apresentada a dinâmica do modelo com assimetria após a economia sofrer um choque de política monetária. Ao elevar os juros da economia, o consumo privado reduz, uma vez que as

¹⁸ O tamanho da inovação inicial para o choque no juro nominal do Banco Central é de 1% e -1%.

famílias nessa economia têm acesso ao mercado de títulos doméstico, o que acarreta em uma postura mais poupadora das famílias ao postergar o consumo de bens para períodos futuros. O produto da economia cai influenciado pelo arrefecimento do consumo e essa queda é amplificada pela redução nos gastos do governo no período corrente. Diante de uma economia mais arrefecida, os salários nominais apresentam uma leve queda a partir do seu equilíbrio, o que acaba ajudando a reduzir os preços gerais e; assim, desinflationando a economia como um todo. Por outro lado, uma política monetária acomodatória leva a um aumento no consumo, refletindo-se na elevação do produto, sendo ajudado também por um leve aumento nos gastos do governo. Diante de uma economia mais aquecida, os salários apresentam um grande aumento, o que acaba pesando bastante sobre o nível de preços da economia. Como podem ser observados, os resultados mais interessantes são aqueles relacionados ao comportamento das variáveis de salários e de inflação do modelo, devido à introdução dos parâmetros referentes às assimetrias nos custos de ajustamentos de preços e de salários. Perceba que uma política acomodatória leva a um aumento muito maior da inflação e dos salários do que uma diminuição destes quando a política monetária é contracionista. Isso ocorre em decorrência dos valores dos parâmetros Ψ_w e Ψ_p serem maiores do que zero, indicando que os agentes da economia são mais rígidos a reduzirem seus salários e seus preços. Além disso, vale destacar que, no caso dos preços e dos salários, a volta aos respectivos valores de estado estacionário demoram mais para ocorrer quando o Banco Central decide estimular a economia; porém, no caso do produto e do consumo, a volta para o equilíbrio ocorre praticamente no mesmo período. Isso significa dizer que em uma situação de expansão monetária o consumo e o produto avançam; porém, às custas de um nível maior e mais persistente de inflação. De outra forma, após os preços e salários aumentarem quando a economia está em um período de expansão, os agentes da economia levam mais tempo para ajustar os seus preços e salários, uma vez que aqueles têm um comportamento assimétrico, gerando uma rigidez para baixo. Portanto, em uma economia onde os preços e salários são mais rígidos para baixo, o Banco Central necessita ter mais cuidado em adotar políticas expansionistas, pois os preços e os salários da economia poderiam ser elevados acima do que a economia sustenta, gerando períodos onde a inflação é muito mais elevada e os salários pagos aos trabalhadores são maiores do que a sua produtividade.

Gráfico 4.3 – Modelo Sem Assimetria: Choque de um Desvio Padrão nos Gastos do Governo

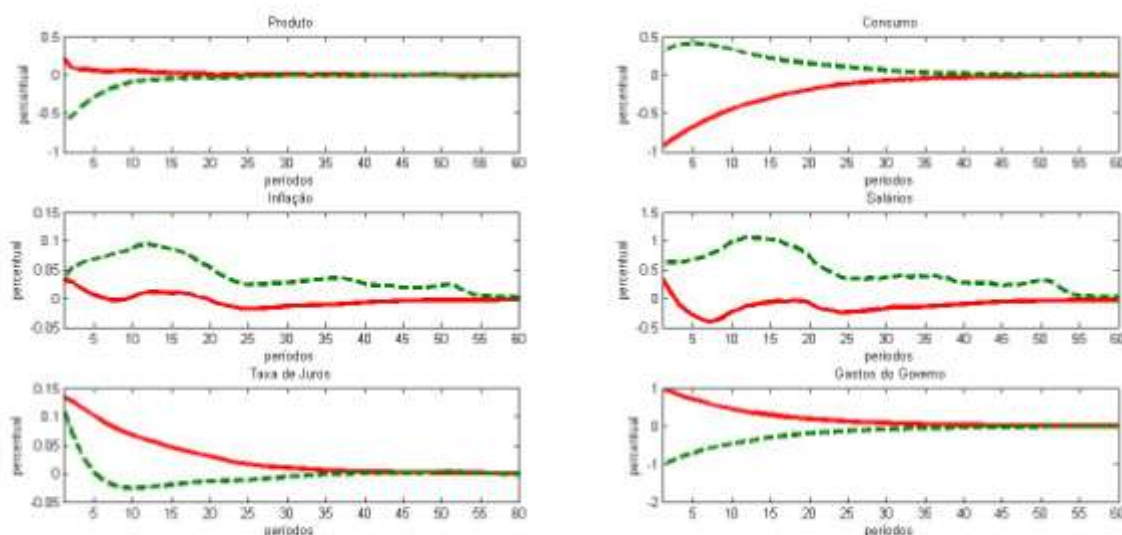


Fonte: Elaborada pelos Autores

No gráfico 4.3, pode ser verificada a resposta dinâmica de algumas variáveis selecionadas diante de um choque de política fiscal tanto expansionista (aumentando os gastos do governo) quanto contracionista (reduzindo os gastos do governo). A linha vermelha sólida corresponde a uma elevação dos

gastos, enquanto que a linha verde tracejada se refere a uma redução dos gastos¹⁹. Um aumento nos gastos leva a uma diminuição do consumo; porém, o produto responde positivamente ao estímulo fiscal. Diante da redução no consumo, os salários acabam se reduzindo o que; por sua vez, gera uma redução nos preços gerais da economia, enquanto que a autoridade monetária reduz os juros a fim de estimular o consumo que se reduziu.

Gráfico 4.4 – Modelo Com Assimetria: Choque de um Desvio Padrão nos Gastos do Governo



Fonte: Elaborada pelos Autores

No gráfico 4.4, Ao elevar seus gastos, o consumo privado se reduz bastante, uma vez que as famílias nessa economia são todas ricardianas e; com isso, há um efeito *crowding out* grande, em que um aumento nos gastos do governo reduz o consumo privado. Por sua vez, o produto da economia acaba se elevando um pouco nos primeiros trimestres, mesmo com a queda brusca verificada no consumo das famílias; porém, acaba voltando rapidamente para o equilíbrio inicial. Esse aumento pode ser explicado por uma elevação na demanda da economia causada pelo aumento nos gastos governamentais. Com relação aos salários nominais, o que se nota é um pequeno aumento destes, diante do impulso fiscal inicial. Entretanto, com o consumo privado caindo e o produto agregado voltando ao seu equilíbrio de maneira rápida, os salários acabam voltando para um patamar mais baixo nos trimestres subsequentes. A alta nos salários acaba impactando a inflação e, com isso, o Banco Central intervém através da elevação dos juros para circunscrever os efeitos inflacionários no curto prazo. Por outro lado, uma política fiscal contracionista traz um pequeno aumento no consumo das famílias, enquanto que o produto agregado da economia acaba apresentando uma queda não desprezível. Com uma demanda mais aquecida, ocasionada pelo aumento no consumo privado, os salários nominais crescem bastante e estes permanecem em patamares bem acima do ponto de equilíbrio por um longo período de tempo. Diante de salários mais altos, as firmas optam por aumentar os preços de seus produtos de maneira a acompanhar os salários das famílias e, com isso, aumentar o seu lucro pelo menos no curto prazo. Como pode ser verificado no gráfico 4.4, o movimento dos salários e dos preços são semelhantes, refletindo a rigidez para baixo, ocasionada pela introdução de custos de ajustamento assimétricos no modelo. Ao verificar um cenário inflacionário, a autoridade monetária eleva os juros; porém, o que se verifica é um aumento de juros menor do que o verificado anteriormente. Parece que o Banco Central opta por combater os efeitos inflacionários; no entanto, uma vez que o produto agregado da economia acaba caindo, o aumento de juros não ocorre de maneira mais rápida para não causar uma queda muito maior no produto agregado da economia. Esse comportamento é muito semelhante ao verificado nos últimos quatro anos, onde o Banco

¹⁹ O tamanho da inovação inicial para o choque nos gastos do governo é de 1% e -1%.

Central foi mais tolerante com a inflação a fim de que o produto não fosse afetado por juros maiores. Em suma, como pode ser verificado no gráfico 4.4, uma expansão fiscal acaba trazendo pouco resultado no movimento do produto agregado da economia, enquanto que uma contração fiscal gera uma redução do produto. Por sua vez, os efeitos nos salários e na inflação podem ser perversos tanto numa expansão quanto numa contração na política fiscal.

Por último, Ao realizar uma comparação entre o comportamento do modelo simétrico com o assimétrico quando a economia sofre um choque de política monetária, o que se percebe é que uma política expansionista ocasiona um movimento semelhante nos salários em ambos os modelos. Contudo, no caso dos preços, estes acabam se elevando de maneira mais abrupta no modelo com rigidez assimétrica e; além disso, permanecem fora do equilíbrio por um período mais prolongado (em torno de cinco trimestres a mais do que no modelo linearizado), indicando uma maior persistência dos efeitos inflacionários na economia brasileira quando os agentes se comportam de maneira assimétrica no ajuste dos preços e salários. No caso do consumo e do produto, as respostas são muito semelhantes em ambos os casos, mostrando que as não linearidades geradas nos preços e salários acabam não influenciadas demasiadamente o comportamento daquelas variáveis. Por sua vez, quando a economia sofre um choque de política fiscal, o produto e o consumo apresentam comportamento distinto entre os modelos. No caso dos preços e dos salários, um desajuste fiscal temporário acaba gerando um desequilíbrio maior tanto no caso do modelo linearizado quanto no não linear, com este demorando em torno de 55 períodos para voltar ao equilíbrio, cinco trimestres a mais se comparado ao modelo sem assimetrias. Em suma, ao comparar a dinâmica dos dois modelos quando a economia sofre um choque de política monetária ou fiscal, o que se percebe é um efeito muito maior nos preços e nos salários na situação com rigidez assimétrica. O resultado já era esperado acontecer, uma vez que os parâmetros estimados que governam o grau de assimetria na rigidez no modelo não linear criam evidências de que a economia é mais rígida para baixo. Diante desses fatos apresentados, em uma economia onde os formadores de preços e salários são mais rígidos para baixo, tanto o Banco Central quanto a autoridade fiscal devem agir com cautela, uma vez que uma acomodação monetária ou um desequilíbrio nas contas públicas acabam levando a efeitos maiores nos salários e na inflação e; diante disso, a economia demora mais para se ajustar. Assim, em épocas de eleição, quando o governo no poder costuma injetar estímulos na economia, um desequilíbrio nas contas públicas ou uma redução de juros pelo Banco Central para estimular o crédito e o consumo podem levar a períodos de inflação mais alta e mais persistentes, fazendo com que a economia demore mais para voltar ao seu nível de equilíbrio.

5. Conclusão

O uso de modelos DSGE na sua representação linearizada tornou o Filtro de Kalman a ferramenta padrão para obter a verossimilhança, ajudando na estimação desses modelos econômicos. Contudo, esse filtro muitas vezes assume uma estrutura muito restritiva, o que acaba limitando a análise de fenômenos não lineares verificados nos dados da vida real. Diante disso, o trabalho pioneiro de Villaverde e Ramírez (2005) abriu uma nova avenida no estudo de modelos macroeconômicos não lineares ao desenvolver um algoritmo Sequencial de Monte Carlo que permite a estimação da função de verossimilhança de um modelo solucionado por um método de solução não linear. A partir daí, diversos trabalhos envolvendo a estimação de modelos não lineares com o uso de Métodos Sequenciais de Monte Carlo foram realizados, por exemplo, An e Schorfheide (2007), Villaverde e Ramírez (2007), Amisano e Tristani (2010), Andreasen (2011) e Fasolo (2012).

O mais famoso desses métodos é o chamado Filtro de Partículas que vem a ser um estimador numérico de estados completamente não linear e que pode ser utilizado para estimar qualquer modelo em formato de estado de espaço. De acordo com Simon (2006), Filtro de Partículas, ou Filtragem de Monte Carlo, é uma abordagem estatística de “força bruta” de estimação que frequentemente funciona bem para problemas que são difíceis de lidar com o filtro de Kalman convencional; ou seja, sistemas que são altamente não lineares.

Assim, tendo em mãos um ferramental estatístico que traz a possibilidade do uso de modelos DSGE não lineares e que representem melhor a realidade da economia, o uso de um modelo que gera não linearidades fundamentais é possível. Levando isso em consideração foi possível a utilização de um

modelo DSGE com custos de ajustamento assimétrico nos preços e nos salários, os quais geram uma não linearidade no comportamento dos agentes da economia, proposto por Kim e Murcia (2009) e expandido por Aruoba et al. (2013). Esse modelo nos permite verificar se os preços e salários são mais rígidos para cima ou para baixa. Em outras palavras, o objetivo do trabalho é verificar se a rigidez de preços e salários na economia brasileira é assimétrica e como esta afeta o comportamento da dinâmica da economia. Portanto, o presente trabalho estimou os parâmetros estruturais da economia brasileira e analisou o comportamento das principais variáveis macroeconômicas aos movimentos de política monetária e fiscal. O modelo é resolvido usando métodos de perturbação de segunda ordem com base em Schmitt-Grohé e Uribe (2004) e estimado com dados brasileiros, utilizando-se para isso, o Filtro de Partículas a fim de construir a verossimilhança.

Os resultados encontrados criam evidências de que os salários e os preços na economia brasileira são mais rígidos para baixo, uma vez que os parâmetros relacionados à assimetria na rigidez são maiores do que zero. Em outras palavras, há uma assimetria – mais fraca nos salários e mais forte nos preços – que faz com que os agentes da economia apresentem uma maior rigidez na redução de salários e preços do que em uma elevação destes. Tais assimetrias, no caso dos preços podem ser causadas por certo grau de monopólio verificado no comportamento das firmas, bem como resultado da própria rigidez para baixo verificada nos salários, uma vez que grande parte dos custos das empresas se dá com o pagamento da folha salarial de seus empregados. Por sua vez, a assimetria nos salários pode ser causada pela característica do mercado de trabalho brasileiro, onde existe um conjunto legislativo muito complicado para a formulação de contratos mais flexíveis. Além disso, é um mercado com alto grau de rotatividade e informalidade que pode ocasionar assimetrias não desprezíveis.

Por sua vez, com base no estudo das funções de impulso e resposta, pode-se concluir que com a presença dessas assimetrias na rigidez dos formadores de preços e de salários da economia, o Banco Central necessita ter mais cuidado na formulação de uma política monetária expansionista, pois dado que os preços e salários são menos rígidos para subir do que para cair, um afrouxamento monetário poderia levar a períodos mais longos e mais altos de inflação. Da mesma forma, os movimentos de política fiscal (tanto expansionista quanto contracionista) acabam trazendo resultados ruins principalmente para a inflação o que acaba indicando que o melhor caminho para a política fiscal é ser mantida em seu nível de equilíbrio, ou seja, na zona de neutralidade. Adicionalmente, ao comparar a dinâmica da economia assimétrica (solucionada por um método não linear e estimada com a ajuda do Filtro de Partículas) com a economia simétrica (versão linearizada com a verossimilhança calculada pelo Filtro de Kalman), o que se verificou é que a economia não linear demora mais para voltar ao seu equilíbrio após ser atingida por um choque monetário ou fiscal e as não linearidades são mais pronunciadas no comportamento dos preços e dos salários do que nas demais variáveis macroeconômicas.

Por fim, com o objetivo de continuar com a corrente de pesquisa proposta no presente trabalho, diversos elementos podem ser incluídos e melhorados. Com relação às assimetrias de rigidez nos preços e nos salários, seria interessante estudar os fenômenos exatos que causam tais assimetrias. Além disso, outra possibilidade seria utilizar um modelo DSGE com economia aberta e também incluir a acumulação de capital para tentar aproximar ao máximo o modelo teórico da economia real. Por fim, com relação ao Filtro de Partículas, seria interessante utilizar as extensões desse filtro, como o Filtro de Partículas Condicional (Amisano e Tristani, 2010), ou o Filtro de Partículas proposto por Andreasen (2011) com o intuito de melhorar ainda mais as estimativas desse filtro.

Bibliografia

- ALVES, S. A. L. Essays on Trend Inflation: Optimal Policy, Estimation Bias, and Unemployment Volatility. PhD Thesis, **University of California**, Santa Cruz, Outubro, 2011.
- AMISANO, G.; TRISTANI, O. Euro Area Inflation Persistence in an Estimated Nonlinear DSGE Model. **Journal of Economic Dynamics & Control**. 34, p. 1837-1858, 2010.
- AN, S. **Bayesian Estimation of DSGE Models: Lessons from Second-Order Approximations**. Working Paper, 2005.
- AN, S.; SCHORFHEIDE, F. Bayesian Analysis of DSGE Models. **Econometric Review**, n. 26, p. 187-192, 2007.

- ANDREASEN, M. M. Non-Linear DSGE Models and the Optimizeed Central Difference Particle Filter. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 35, n. 10, p. 1671-1695, 2011.
- ANDRIEU, C.; DOUCET, A.; HOLENSTEIN, R. Particle Markov Chain Monte Carlo Methods. **Journal of the Royal Statistical Society Series B**. 72 (3), p. 269-342, 2010.
- ARULAMPALAM, M. S.; MASKELL, S.; GORDON, N.; CLAPP, T. A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-gaussian Bayesian Tracking. **IEEE Transactions on Signal Processing**. 50 (2), p. 174-188, 2002.
- ARUOBA, S. B.; BOCOLA, L.; SCHORFHEIDE, F. **Assessing DSE Model Nonlinearities**. Manuscript, University of Pennsylvania, 2013.
- ARUOBA, S. B.; VILLAVERDE, J. F.; RAMÍREZ, R. J. Comparing Solution Methods for Dynamic Equilibrium Economies. **Journal of Economic Dynamic and Control**, 30 (12), p. 2477-2508, 2006.
- BANCO CENTRAL DO BRASIL. Bcb. Abr./maio 2015. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br>. Acesso em 10.maio.2014.
- BERGER, J. O.; WOLPER, R. L. The Likelihood Principle. **Institute of Mathematical Statistics**, Lecture Notes Volume 6. 1988.
- BLANCHARD, O.; FISHER, S. **Lectures on Macroeconomics**. Cambridge, Massachussets: MIT Press, 1989.
- CALVO, G. Staggered Prices in a Utility Maximizing Framework. **Journal of Monetary Economics**. V. 12, p. 383-398, 1983.
- CAMARGO, J. M. Desemprego, Informalidade e Rotatividade: Reformas que Fazem Diferença. Em: GIAMBIAGI, F.; BARROS, O. (Orgs.). **Brasil Pós-Crise: Agenda para a Próxima Década**. Rio de Janeiro, Elsevier, 2009. Parte II, Cap. 14, p. 231-244.
- CASTRO, M. R.; GOUVEA, S. N.; MINELLA, A.; SANTOS, R. C.; SOUZA-SOBRINHO, N. F. **Samba: Stochastic Analytical Model with a Bayesian Approach**. Banco Central do Brasil, Working Paper Series, n. 239. Brasília: BCB, 2011.
- CHIB, S. Markov Chain Monte Carlo Methods: Computational an Inference, In: HECKMAN, J. J.; LEAMER, E. **Handbook of Econometrics**. Amsterdam: Elsevier Science, 2001. Vol. 5, Cap. 57, p. 3569-3649.
- CHRISTIANO, L. J.; EICHENBAUM, M.; EVANS, C. L. Monetary Policy Shocks: What Have We Learned and What End? In: TAYLOR, J. B.; WOODFORD, M.; **Handbook of Macroeconomics 1A**. Amsterdam: Elsevier Science, p. 65-148, 1999.
- CHRISTIANO, L. J.; EICHENBAUM, M.; EVANS, C. L. Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy. **Journal of Political Economy**. 113, p. 1-45, 2005.
- COX, I. J. Blanche – An Experiment in Guidance and Navigation of an Autonomous Robot Vehicle. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 7, n. 2, p. 193-204, abr., 1991.
- DEJONG, D. N.; DAVE, C. **Structural Macroeconometrics**. Princeton, NJ: Princeton University Press; 2007.
- DEJONG, D. N.; DHARMARAJAN, H.; LIESENFELD, R.; MOURA, G.; RICHARD, J. **Efficient Likelihood Evaluation of State-Space Representations**. Czech National Bank, Working Papers, 2009.
- DYNARE. Disponível em: <http://www.cepremap.cnts.fr/dynare>.
- FASOLO, A. M. **A Note on Particle Filter Applied to DSGE Models**. Banco Central Working Papers Series 281, Banco Central do Brasil, 2012.
- FLURY, T.; SHEPHARD, N. Bayesian Inference Based Only on Simulated Likelihood: Particle Filter Analysis of Dynamic Economic Models. **Econometric Theory**, 27 (5), p. 933-956, 2011.
- FURLANI, L. G. C.; PORTUGAL, M. S. LAURINI, M. Exchange Rate Movements and Monetary Policy in Brazil: Econometric and Simulation Evidence. **Economic Modelling, Elsevier**, v. 27 (1), 2010.
- GALÍ, J. **Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework**. Princeton and Oxford, 2008.
- GALLANT, A. R.; ROSSI, P. E.; TAUCHEN, G. Nonlinear Dynamic Structures. **Econometrica**, 61, p. 871-908, 1993.
- GIAMBIAGI, F.; VILLELA, A. (Orgs.). **Economia Brasileira Contemporânea (1954-2004)**. Rio de Janeiro, Elsevier, 2005.

- GOMME, P.; KLEIN, P. **Second-Order Approximation of Dynamic Models Without the Use of Tensors**. Mimeo, University of Western Ontario, 2008.
- GORDON, N. J.; SALMOND, D. J.; SMITH, A. F. M. Novel approach of Nonlinear/Non-gaussian Bayesian State estimation. **Radar and Signal Processing, IEE Proceedings-F**, 140 (2), 107-113, 1993.
- JUDD, K. L. **Numerical Methods in Economics**. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1998.
- JUDD, K. L.; GUU, S. M. Asymptotic Methods for Aggregate Growth Models. **Journal of Economic Dynamic and Control**, 21 (6), p. 1025-1042, 1997.
- KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Linear Problems. **Transaction of the ASME – Journal of Basic Engineering**, 82 (Series D): 35-45. 15. 1960.
- KIM, J.; F. RUGE-MURCIA. How Much Inflation is Necessary to Grease the Wheels. **Journal of Monetary Economics**, n. 56, p. 365-377, 2009.
- KIM, J.; KIM, S.; SCHAUMBURG, E. SIMS, C. **Calculating and Using Second Order Accurate Solutions of Discrete Time Dynamic Equilibrium Models**. Mimeo, 2003.
- KIM, S.; SHEPHARD, N.; CHIB, S. Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with Arch Models. **Review of Economic Studies**, 65 (3), p. 361-93, 1998.
- KITAGAWA, G. Non-gaussian State Space Modeling of Nonstationary Time Series. **Journal of the American Statistical Association**, 82 (400): 1032-1041. 15, 22. (1987).
- KITAGAWA, G. Monte Carlo Filter and Smoother for non-gaussian nonlinear state space models. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, 5 (1): 1-25. 105, 109, 110. (1996).
- KOOP, G.; PESARAN, M. H.; POTTER, S. Impulse Response Analysis in Non-linear Multivariate Models. **Journal of Econometrics**, 74, p. 119-147, 1996.
- KYDLAND, F.; PRESCOTT, E. Time to Build and Aggregate Fluctuations. **Econometrica**, v. 50, p. 1345-1370, 1982.
- LUCAS, R. E. Jr. **Econometric Policy Evaluation: A Critique**. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, v. 1, p. 19-46, 1976.
- LUCAS, R. E. Jr.; PRESCOTT, E. C. Investment under Uncertainty. **Econometrica**, n. 39, p. 659-681, 1971.
- METROPOLIS, N.; ULAM, S. The Monte Carlo Method. **Journal of the American Statistical Association**, v. 44, n. 247, p. 335-341, 1949.
- MIRANDA, M. J.; FACKLER, P. L. **Applied Computational Economics and Finance**. The MIT Press, 2002.
- MONFORT, A. A Reappraisal of Misspecified Econometric Models. **Econometric Theory** 12, 597-612. 1996.
- MOURA, G. V. **Efficient Importance Sampling in Applied Econometrics**. PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität Zu Kiel, C.A.U., Alemanha, 2010.
- NUNES, A. F. N.; PORTUGAL, M. S. Políticas Fiscal e Monetária Ativas e Passivas: Uma Análise para o Brasil Pós-Metas de Inflação. **ANPEC**, 2009.
- PITT, M. K.; SHEPHARD, N. Filtering via Simulation: Auxiliary Particle Filters. **Journal of the American Statistical Association**, 94 (446), p. 590-559.
- PORTUGAL, M.; JUNIOR, O. A. F. **Impacto da Política Fiscal Sobre a Taxa de Câmbio: Análise para o Caso Brasileiro Através de um Modelo DSGE com Economia Aberta**. Texto para Discussão do Programa de Pós-Graduação em Economia da UFRGS. 2012.
- PORTUGAL, M.; SILVA, F. **O Impacto de Choques Fiscais na Economia Brasileira: Uma Abordagem DSGE**. Texto para Discussão do Programa de Pós-Graduação em Economia da UFRGS. 2011.
- REBELO, S. **Real Business Cycle Models: Past, Present, and Future**. Northwestern University, March, 2005.
- ROMER, D. **Advanced Macroeconomics**. New York, McGraw-Hill/Irwin, 4ª Edição, 2012.
- ROTEMBERG, J. Monopolistic Price Adjustment and Aggregate Output. **Review of Economic Studies**, n. 49, p. 517-531, 1982.
- SANTOS, F. G.; KANCZUK, F. Price Puzzle e Canal de Custo da Política Monetária: Evidência para a Economia Brasileira. **ANPEC**, 2011.

- SCHMITT-GROHÉ, S.; URIBE, M. Optimal Fiscal and Monetary Policy under Stick Prices. **Journal of Economic Theory**, n. 114, p. 198-230, 2004.
- SCHMITT-GROHÉ, S.; URIBE, M. Solving Dynamic General Equilibrium Models Using a Second-Order Approximation to the Policy Function. **Journal of Economic Dynamic and Control**, n. 28, p. 755-775, 2004.
- SCHORFHEIDE, F. Loss Function-Based Evaluation of DSGE Models. **Journal of Applied Econometrics**, n. 15, p. 645-670, 2000.
- SIN, H.; GAGLIANONE, W. Stochastic Simulation of a DSGE Model for Brazil, **MPRA**, n. 20853, 2006.
- SMITH, A.; GELFAND, A. Bayesian Statistics without Tears: A Sampling-Resampling Perspective. **The American Statistician**, 46 (2), p. 84-88, 1992.
- SIMON, D. **Optimal State Estimation: Kalman, h_∞ , and Nonlinear Approaches**. Hoboken: John Wiley, 2006.
- SIMS, C. Macroeconomics and Reality. **Econometrica**, v. 48, n. 1, p. 1-48, 1980.
- SIMS, C. Solving Linear Rational Expectations Models. **Computational Economics**, v. 20, p. 1-20, 2001.
- SMETS, F.; WOUTERS, R. An Estimated Stochastic Dynamic General Equilibrium Model of the Euro Area. **Journal of the European Economic Association**, v.1, p. 1123-1175, 2004.
- STRID, I. Parallel Particle Filters for Likelihood Evaluation in DSGE Models: An Assessment. In: Proceeding of the Computing in Economics and Finance. **Society for Computational Economics**, v. 395, 2006.
- UHLIG, H. **A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily**. Manuscript, Tilburg University, 1999.
- VASCONCELOS, B.; DIVINO, J. O Desempenho Recente da Política Monetária Brasileira sob a Ótica da Modelagem DSGE. **Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil**, n. 291, 2012.
- VARIAN, H. A Bayesian Approach to Real Estate Assessment. Em: FEINBERG, S. E.; ZELLNER, A. **Studies in Bayesian Economics in Honor of L. J. Savage**. Amsterdam: North-Holland, 1974.
- VILLAVERDE, J. F.; RAMÍREZ, R. J. Estimating Dynamic Equilibrium Economies: Linear Versus Nonlinear Likelihood. **Journal of Applied Econometrics**, 20 (7): 891-910. 2005.
- VILLAVERDE, J. F.; RAMÍREZ, R. J. **Estimating Macroeconomic Model: A Likelihood Approach**. Mimeo, University of Pennsylvania. 2007.
- VILLAVERDE, J. F.; RAMÍREZ, R. J.; SANTOS, M. S. Convergence Properties of the Likelihood of Computed Dynamic Models. **Econometrica**, 74 (1): 93-119. 2006.