Cálculo de Funções de Várias Variáveis

Um Livro Colaborativo

15 de maio de 2019

Organizadores

Esequia Sauter - UFRGS

Fabio Souto de Azevedo - UFRGS

Pedro Henrique de Almeida Konzen - UFRGS

Licença

Nota dos organizadores

Nosso objetivo é de fomentar o desenvolvimento de materiais didáticos pela colaboração entre professores e alunos de universidades, institutos de educação e demais interessados no estudo e aplicação do cálculo nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia.

Para tanto, disponibilizamos em repositório público GitHub (https://github.com/reamat/Calculo) todo o código-fonte do material em desenvolvimento sob licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada (CC-BY-SA-3.0). Ou seja, você pode copiar, redistribuir, alterar e construir um novo material para qualquer uso, inclusive comercial. Leia a licença para maiores informações.

O sucesso do projeto depende da colaboração! Participe diretamenta da escrita dos recursos educacionais, dê sugestões ou nos avise de erros e imprecisões. Toda a colaboração é bem vinda. Veja mais sobre o projeto em:

https://www.ufrgs.br/reamat/Calculo

Desejamos-lhe ótimas colaborações!

Prefácio

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

1.1 Exercícios finais

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Capítulo 2

Álgebra vetorial

O objetivo deste capítulo é revisar conceitos básicos do cálculo e da álgebra linear necessários ao entendimento do cálculo vetorial.

2.1 Vetores e escalares

Na álgebra linear, vetores são definidos de forma abstrata como os elementos de um espaço vetorial. Os vetores são, então, os elementos de um conjunto em que estão definidas duas operações: a soma de vetores e o produto de vetores por escalares obedecendo as propriedades (2.1). Um escalar é um número real ou complexo. Quando o corpo de escalares é o conjunto dos números reais, então dizemos que o espaço vetorial é real. Quando o corpo de escalares é o conjunto dos números complexos, dizemos que o espaço vetorial é complexo. Usaremos uma letra latina com uma seta para denotar vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$). Para que um espaço vetorial esteja bem definido, as seguinte propriedades devem ser satisfeitas:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \qquad \text{(Comutatividade da soma)} \tag{2.1a}$$
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}, \qquad \text{(Associatividade da soma)} \tag{2.1b}$$
$$(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \qquad \text{(Distributividade da multiplicação)} \tag{2.1c}$$
$$\alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \qquad \text{(Distributividade da soma)} \tag{2.1d}$$
$$\alpha\,(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u}, \tag{2.1e}$$
$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}, \qquad \text{(Existência do vetor nulo)} \tag{2.1f}$$
$$0\vec{v} = \vec{0}, \tag{2.1g}$$
$$1\vec{v} = \vec{v}. \qquad \text{(Elemento neutro)} \tag{2.1h}$$

Observação 2.1.1. O vetor nulo $\vec{0}$ e escalar nulo 0 são entidades matemáticas distintas e não devem ser confundidas.

Observação 2.1.2. Observamos que a propriedade associativa dada por (2.1b) permite que se escreve a soma de três vetores $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ sem risco de ambiguidade. A propriedade (2.1e) é algumas vez chamada de associatividade, no entanto, é cauteloso observar que ela não estabelece a associatividade de uma operação, já que o produto de escalares é uma operação distinta do produto de um escalar por um vetor. A propriedade (2.1f) garante a existência de um vetor nulo que funciona com um elemento neutro da soma vetorial.

A subtração de dois vetores é definida por

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-1)\vec{v}. \tag{2.2}$$

O vetor $(-1)\vec{v}$ é também denotado por $-\vec{v}$ e tem a seguinte propriedade:

$$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{v}+(-1)\vec{v}=(1-1)\vec{v}=0\vec{v}=\vec{0}. \tag{2.3}$$

Um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ é dito linearmente dependente (LD), se existem escalares $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ com pelo menos um $\alpha_i\neq 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i=\vec{0}$$

Analogamente, um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ é dito linearmente independente (LI) se a identidade

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i=\vec{0}$$

implica necessariamente que

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0.$$

Um conjunto de vetores LI $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ é dito uma base para um espaço vetorial V se todo vetor $\vec{v}\in V$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de B:

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e}_i.$$

Um espaço vetorial é dito de dimensão finita se admite uma base composta por um número finito de elementos.

Teorema 2.1.1. *Seja V um espaço vetorial e $E=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ e $F=\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_m\}$ duas bases de V. Então $n=m$. Em outras palavras, todas as bases de espaço linear de dimensão finita têm o mesmo número de elementos.*

A importância deste teorema reside no fato de permitir a definição de dimensão de um espaço vetorial como sendo o número de elementos de uma base. Esta definição está bem posta, uma vez que este número independe da escolha de base.

Outro conceito importante em espaços reais de dimensão finita é o de orientação de uma base. O leitor já deve estar familiarizado com o conceito de orientação dextrogira e levogira (regra da mão direita e esquerda) no espaço tridimensional. No entanto este conceito pode ser estendido de forma natural para espaços reais de n-dimensões. Formalmente falando duas bases B_1 e B_2 têm a mesma orientação se o determinante da transformação linear que liga B_1 a B_2 é positivo.

O espaço vetorial real de n dimensões é denotado $\mathbb{R}^n$.

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

2.2 O espaço euclidiano tridimensional

Nossa principal preocupação neste curso é com o espaço euclidiano de três dimensões, dada sua importância para descrição do espaço na física clássica.

O leitor já tem familiaridade com o sistema de coordenadas cartesianas (xyz) para representar um ponto no espaço euclidiano tridimensional. Neste sistema, também chamado referencial cartesiano, cada ponto é representado por um conjunto de três coordenadas x, y e z. Observamos que existem duas maneiras distintas de orientar tal sistema: usando a regra da mão direita e a regra da mão esquerda, que recebem o nome de dextrogira e levogira, respectivamente. Neste texto, daremos preferência pela orientação dextrogira, que convencionaremos como padrão. Uma vez escolhido um sistema dextrogiro como base, um trio de vetores linearmente independentes $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dito dextrogiro se o determinante

$$\det\left(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\right) \tag{2.4}$$

Figura 2.1: À esquerda, um sistema dextrogiro (regra da mão direita). À direita, sistema levogiro (regra da mão esquerda).

é positivo. Reciprocamente, o trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dito levogiro se o determinando for negativo. Veja mais detalhes no exemplo (2.2.8).

Um vetor é representado neste sistema como um trio de números reais, denominados componentes do vetor $\vec{v}$ e denotados por:

$$\vec{v} = \langle v_1{,}v_2{,}v_3 \rangle \,. \tag{2.5}$$

É natural neste momento definir os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ como

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \langle 1{,}0{,}0 \rangle \\ \vec{j} &= \langle 0{,}1{,}0 \rangle \\ \vec{k} &= \langle 0{,}0{,}1 \rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

de forma que a expressão (2.5) pode ser escrita como

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}. \tag{2.7}$$

O vetor nulo é definido como vetor cujas três coordenadas são nulas:

$$\vec{0} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = \langle 0{,}0{,}0 \rangle \,. \tag{2.8}$$

A soma de dois vetores é dada pela soma componente a componente, ou seja, se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\,\vec{i} + (u_2 + v_2)\,\vec{j} + (u_3 + v_3)\,\vec{k}. \tag{2.9}$$

O produto de um vetor por um escalar é definido como a multiplicação componente a componente pelo escalar, ou seja, se $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$, então

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1)\vec{i} + (\alpha u_2)\vec{j} + (\alpha u_3)\vec{k}. \tag{2.10}$$

Definimos também a norma euclidiana de um vetor $\vec{v}$ como a distância da origem até o ponto que o vetor representa e a denotamos por $\|\vec{v}\|$. Pelo Teorema de Pitágoras, da geometria euclidiana, temos:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{2.11}$$

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

E 2.2.1. Mostre que o espaço vetorial assim definido satisfaz as propriedades (2.1).

E 2.2.2. Verifique que a norma euclidiana satisfaz as seguintes propriedades:

$$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\,\|\vec{u}\|, \qquad \text{(Homogeneidade)} \tag{2.12a}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \qquad \text{(Desigualdade triangular)} \tag{2.12b}$$

$$\|\vec{u}\| = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}, \qquad \text{(Separação)} \tag{2.12c}$$

Dica: Para mostrar a desigualdade triangular, entenda seu significado geométrico. Uma demonstração puramente algébrica pode ser feita, embora seja mais laboriosa. Veremos mais adiante que o conceito de produto escalar permite simplificar os cálculos.

A fim de simplificar a notação, a norma de um vetor $\vec{v}$ pode ser escrita simplesmente como v, ou seja

$$v = \|\vec{v}\|$$

Um vetor de norma 1 é chamado de vetor unitário. Todo vetor não nulo pode ser escrito na forma

$$\vec{v} = v\hat{v} \tag{2.13}$$

onde v é a norma de $\vec{v}$ e $\hat{v}$ é um vetor unitário dado por

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}. \tag{2.14}$$

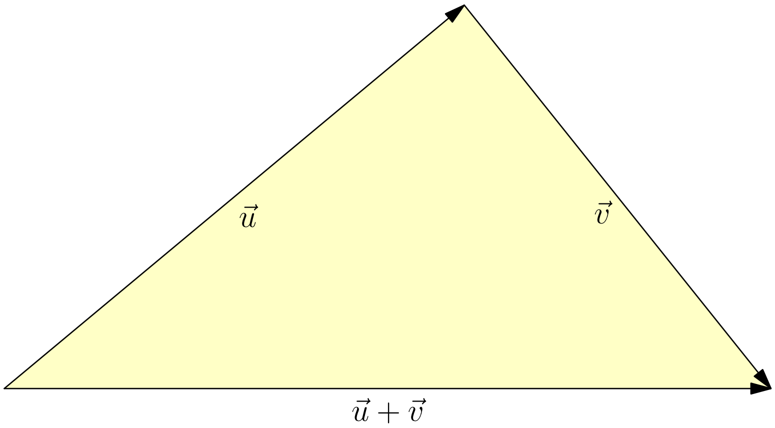

Figura 2.2: Representação gráfica da desigualdade triangular: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

O vetor $\hat{v}$ é chamado de versor de $\vec{v}$. $\hat{v}$ é um vetor unitário que tem mesmo sentido e direção de $\vec{v}$.

A identidade (2.13) tem uma importante interpretação geométrica: todo vetor não nulo pode ser representado pelo seu módulo e por seu versor, que traz a informação de direção e sentido. Os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são exemplos de versores. O vetor nulo é o único vetor ao qual não se pode associar direção e sentido únicos.

E 2.2.3. Mostre que a norma de um versor conforme definido em (2.14) é sempre unitária.

E 2.2.4. Considere os vetores dados por $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$. Represente estes vetores em um referencial euclidiano, calcule suas normas, calcule os versores associados $\hat{u}$, $\hat{v}$ e $\hat{w}$ e represente-os no mesmo gráfico.

Resp: $u = \sqrt{2}$, $v = \sqrt{5}$ e $w = \frac{\sqrt{13}}{6}$. $\hat{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$, $\hat{v} = \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}$, $\hat{w} = \frac{2\sqrt{13}}{13}\vec{i} + \frac{3\sqrt{13}}{13}\vec{j}$

E 2.2.5. Considere o vetor $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\vec{j}$. Mostre que este vetor é unitário e represente-o graficamente quando $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \pi$

E 2.2.6. Considere o vetor $\vec{u} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$. Verifique que este vetor é unitário e represente-o graficamente quando

a) $\theta = 0$

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$

c) $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$

d) $\theta = \pi$

E 2.2.7. Seja $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ um vetor não nulo fixo no plano xy e $\vec{v} = v\left(\cos\varphi\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\vec{j}\right)$ um vetor de norma fixa no plano xy. Considere a função $m(\varphi) = \|\vec{u} + \vec{v}\|$ e encontre o valor máximo e mínimo de $m(\varphi)$. Interprete o resultado.

E 2.2.8. Conforme observado no texto, um trio de vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dextrogiro se

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} > 0.$$

onde $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. Faça o que se pede:

a) Verifique que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forma um sistema dextrogiro então $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é levogiro.

b) Verifique que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forma um sistema dextrogiro então $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{u}$ e $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dextrogiros.

c) Verifique que o trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dextrogiro quando $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

d) Verifique que o trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dextrogiro quando $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i}$. Interprete graficamente.

E 2.2.9. Considere um sistema de coordenadas cartesianas dextrogiro construído da seguinte forma:

- O centro da Terra coincide com a origem do sistema.
- O extremo norte da Terra intercepta o eixo z em valores positivos.
- O observatório de Greenwich está sob plano xz com $x > 0$.

Considere a superfície terrestre com uma esfera de raio $R_\oplus$. Denote a longitude por λ e a latitude por ϕ. Convecione como positivas a longitude leste e a latitude norte. Veja figura 2.3. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ o vetor que representa um ponto sobre a superfície da Terra. Responda:

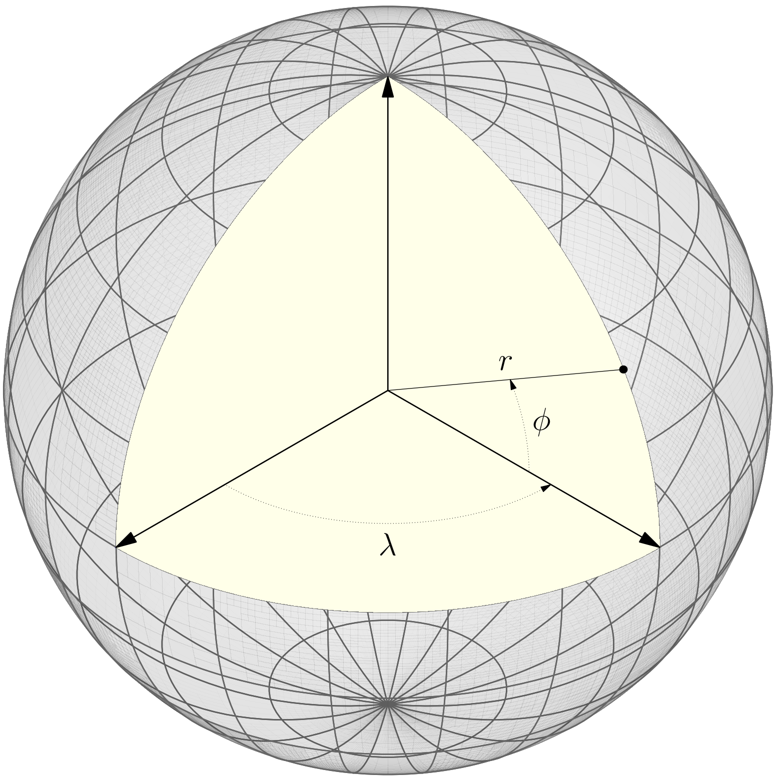

Figura 2.3: Representação gráfica do sistema de coordenadas geográficas.

a) Qual a norma do vetor $\vec{r}$?

b) Qual é o valor da componentes x, y e z de $\vec{r}$ em termos de λ e ϕ?

c) Seja d a distância entre dois pontos sobre a superfície terrestre. Use a lei dos cossenos[1] para mostrar que distância δ sobre a superfície esférica entre esses mesmos dois pontos é dada por

$$\delta = R_\oplus \cos^{-1}\left(1 - \frac{d^2}{2R_\oplus^2}\right)$$

Interprete os casos particulares $d = 0$ e $d = 2R_\oplus$.

d) Considerando $R_\oplus = 6378Km$ e os seguintes valores para as coordenadas geográficas de Porto Alegre, Londres e Tóquio, construa uma tabela com os valores de λ e ϕ e as coordenadas xyz em quilômetros de cada uma dessas cidades.

Localidade	Latitude	Longitude
Porto Alegre	$30°\ 01'\ 58''$S	$51°13'\ 48''$O
Londres	$51°\ 30'\ 28''$N	$0°\ 7'\ 41''$O
Tóquio	$35°\ 41'\ 22''$N	$139°\ 41'\ 30''$L

Tabela 2.1: Coordenadas geográficas de algumas cidades.

e) Construa uma tabela com as distâncias em linha reta e sobre a superfície da Terra entre cada uma dessas cidades.

f) As seguintes coordenadas indicam locais de grande importância cultural ou turística, identifique-os:

2.3 Ângulo entre vetores e o produto escalar

Na seção anterior, começamos a trabalhar com vetores no espaço euclidiano. No entanto, até o momento não lidamos explicitamente com ângulos entre vetores. Introduziremos primeiramente o conceito de produto escalar ou produto interno entre vetores. O produto escalar é uma operação que liga um par de vetores a um

[1]Seja um triângulo de lados a, b e c e seja θ o ângulo entre os lados de comprimento a e b, então $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. Ver também figura 2.4 na página 13.

Localidade	x	y	z
1	4192,872Km	168Km	4803,175Km
2	1175,603Km	5550,889Km	2912,813Km
3	3996,282Km	-127,418Km	4969,143Km

Tabela 2.2: Coordenadas geográficas de três localidades incógnitas.

escalar. O produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é denotado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ e é definida no espaço euclidiano tridimensional como:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{2.15}$$

Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ relacionados por

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Este trio de vetores pode ser intepretado como os três lados de um triângulo como na figura 2.4. Da lei dos cossenos, sabemos que a seguinte relação é satisfeita:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta$$

supondo $u \neq 0$ e $v \neq 0$, temos

$$\cos\theta = \frac{w^2 - u^2 - v^2}{2uv}.$$

Usamos agora a definição de norma de um vetor dada em (2.11):

$$\begin{aligned}
u^2 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\
v^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\
w^2 &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2
\end{aligned}$$

Simplificando, temos:

$$\cos\theta = \frac{w^2 - u^2 - v^2}{2uv} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{uv} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{uv}$$

Esta última expressão nos permite escrever

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = uv\cos(\vec{u},\vec{v}) = uv\cos\theta \tag{2.16}$$

onde $\cos(\vec{u},\vec{v})$ indica o cosseno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp: a) $r = R_\oplus$ b) $x = R_\oplus \cos\phi \cos\lambda$, $y = R_\oplus \cos\phi \,\text{sen}\,\lambda$ e $z = R_\oplus \,\text{sen}\,\phi$

Localidade	ϕ	λ	x	y	z
Porto Alegre	$-30{,}0328°$	$-51{,}23°$	3457,65	$-4305{,}07$	$-3192{,}16$
Londres	51,5078°	$-0{,}0781°$	3969,71	-5,41	4992,02
Tóquio	35,6894°	139,6917°	3950,26	3351,05	3720,87

Tabela 2.3: Coordenadas geográficas e cartesianas de algumas cidades - solução do item d.

Localidades	Distância em linha reta	Distância sobre a superfície esférica
Porto Alegre-Londres	9260Km	10360Km
Porto Alegre-Tóquio	12700Km	18840Km
Tóquio-Londres	8695Km	9570Km

Tabela 2.4: Distância entre as cidades - solução do item e.

Localidade	λ	ϕ	Identificação
1	48°51′30″N	0°02′24″L	
2	27°10′27″N	0°58′42″L	
3	51°10′44″N	0°01′55″W	

Tabela 2.5: Solução do item f

Observação 2.3.1. Neste momento, o leitor deve observar que a definição que demos originalmente para o produto escalar em (2.15) dependia fortemente do sistema de coordenadas escolhido. No entanto, a identidade (2.16) mostra que o valor do produto escalar depende apenas da norma dos vetores envolvidos e do ângulo entre esses vetores, ou seja, (2.16) pode ser usado como uma definição intrínseca (que não depende da escolha do sistema de coordenadas) de produto escalar.

Observação 2.3.2. O produto escalar do vetor nulo $\vec{0}$ por qualquer vetor é zero.

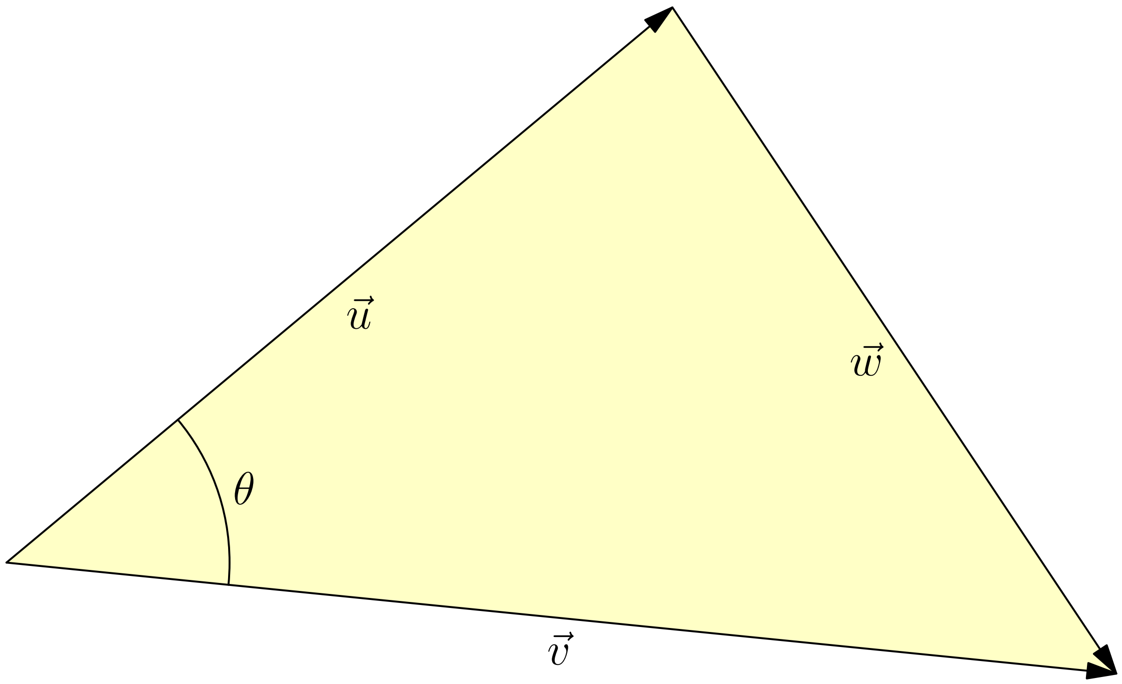

Figura 2.4: Lei dos cossenos: $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

O produto escalar satisfaz as seguintes propriedades:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}, \qquad \text{(Comutatividade)} \tag{2.17a}$$
$$\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \beta(\vec{u}\cdot\vec{w}), \qquad \text{(Linearidade)} \tag{2.17b}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{u} = u^2, \qquad \text{(Respeito à norma)} \tag{2.17c}$$
$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq uv, \qquad \text{(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)} \tag{2.17d}$$

As propriedades (2.17a), (2.17b) e (2.17c) podem ser trivialmente demonstradas diretamente a partir da definição de produto escalar dada em (2.15).

E 2.3.1. Demonstre essas três propriedades.
Observe que $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\alpha\,\vec{u})\cdot\vec{v}$ pelo que podemos escrever $\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ sem risco de ambiguidade.

E 2.3.2. Use (2.17a) e (2.17b) para mostrar a seguinte propriedade:

$$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot\vec{w} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{w}) + \beta(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.17d) pode ser demonstrada a partir de (2.16) uma vez que

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1.$$

No entanto, uma demonstração puramente algébrica pode ser dada a partir das propriedades (2.17a), (2.17b) e (2.17c). Dada a beleza desta demonstração e da possibilidade de generalização, apresentamo-na a seguir:

Consideramos primeiramente os versores $\hat{u}$ e $\hat{v}$ definidos em (2.14) e calculamos

$$\begin{aligned} \|\hat{u}+\hat{v}\|^2 &= (\hat{u}+\hat{v})\cdot(\hat{u}+\hat{v}) = 2 + 2\hat{u}\cdot\hat{v} \\ \|\hat{u}-\hat{v}\|^2 &= (\hat{u}-\hat{v})\cdot(\hat{u}-\hat{v}) = 2 - 2\hat{u}\cdot\hat{v} \end{aligned}$$

onde usamos que $\hat{u}\cdot\hat{u} = \hat{v}\cdot\hat{v} = 1$ posto que a norma de um versor é sempre 1. Agora observamos que $\|\hat{u}+\hat{v}\|^2 \geq 0$ e $\|\hat{u}-\hat{v}\|^2 \geq 0$, pelo que temos:

$$-1 \leq \hat{u}\cdot\hat{v} \leq 1$$

O que implica $|\hat{u}\cdot\hat{v}| \leq 1$. Como $\vec{u} = u\hat{u}$ e $\vec{v} = v\hat{v}$, temos

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq uv$$

Observamos que com uma demontração puramente algébrica para a desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos derivar uma demonstração puramente algébrica da desigualdade triangular (2.12b). Ver também a discussão do excício 2.2.2. Para tal considere a seguinte identidade:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = u^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + v^2$$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq uv$, temos:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq u^2 + 2uv + v^2 = (u+v)^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, temos:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq (u+v) = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dito ortogonais se o ângulo entre eles é 90°, ou seja, se $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$. De (2.16), isto acontece quando $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Usamos o símbolo $\perp$ para denotar a ortogonalidade:

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \tag{2.18}$$

Em especial os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são ortogonais, ou seja:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$$

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

E 2.3.3. Considere os vetores dados por $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ conforme exercício 2.2.4. Calcule o ângulo entre esses vetores.

Resp: 18,43°, 11,3° e 7,13°

E 2.3.4. Mostre que se α e β são escalares diferentes de zero e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, então

$$\cos(\alpha\vec{u},\beta\vec{v}) = \cos(\vec{u},\vec{v})\,.$$

Interprete geometricamente esta identidade.

E 2.3.5. Mostre que se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ então $u_1 = \vec{u} \cdot \vec{i}$, $u_2 = \vec{u} \cdot \vec{j}$ e $u_3 = \vec{u} \cdot \vec{k}$. Conclua que

$$\vec{u} = \left(\vec{u} \cdot \vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{u} \cdot \vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{u} \cdot \vec{k}\right)\vec{k}.$$

E 2.3.6. Sejam $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$ e $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$. Mostre que estes vetores são unitários e ortogonais entre si. Encontre dois vetores unitários distintos ortogonais tanto a $\vec{u}$ quanto a $\vec{v}$.

Resp: $-\vec{k}$ e $\vec{k}$.

E 2.3.7. Sejam $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Mostre que estes vetores são ortogonais entre si. Encontre dois vetores unitários distintos ortogonais tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

Resp: $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} - \vec{k}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{j} + \vec{k}\right)$.

E 2.3.8. Encontre três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que:

a) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w} = \vec{0}$ mas $\vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{w}) \neq \vec{0}$

b) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w} \neq \vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{w})$ e ambos não nulos.

Exemplos de respostas: a) $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{j}$. b) $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{j}$.

E 2.3.9. Sejam os vetores $\vec{u} = \cos(\theta_1)\vec{i} + \operatorname{sen}(\theta_1)\vec{j}$ e $\vec{v} = \cos(\theta_2)\vec{i} + \operatorname{sen}(\theta_2)\vec{j}$ então

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Conclua que o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por

$$\theta = \begin{cases} |\theta_1 - \theta_2|, & |\theta_1 - \theta_2| \leq 180^\circ \\ 360^\circ - |\theta_1 - \theta_2|, & |\theta_1 - \theta_2| > 180^\circ \end{cases}$$

contanto que θ_1 e θ_2 estejam entre 0 e 360°. Interprete geometricamente este resultado.

E 2.3.10. Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo fixo e $\vec{v}$ um vetor de norma não nula fixa. Mostre que $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ tem um ponto de máximo quando $\hat{u} = \hat{v}$ e um ponto de mínimo quando $\hat{u} = -\hat{v}$. Interprete o resultado geometricamente e compare com o problema (2.2.7).

Dica: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = u^2 + v^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ e (2.16).

2.4 O produto vetorial

Além do produto escalar entre vetores, definimos também o produto vetorial. Enquanto o produto escalar de dois vetores é um escalar, o produto vetorial é um terceiro vetor. O produto vetorial entre $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ é denotado $\vec{u} \times \vec{v}$ e é definido em coordenadas cartesianas como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k} \tag{2.19}$$

A definição de produto vetorial pode parecer à primeira vista arbitrária e fortemente dependente do sistema de coordenadas escolhido. No entanto, mostraremos que o produto vetorial admite uma formulação intrínseca, ou seja, que não depende do sistema de coordenadas escolhido. Ademais, veremos que tanto o produto escalar como o produto vetorial surgem naturalmente no estudo da física clássica.

O produto vetorial possui as seguintes propriedades:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, \qquad \text{(Anticomutatividade)} \tag{2.20a}$$
$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \times \vec{w} = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta\,(\vec{v} \times \vec{w})\,, \qquad \text{(Linearidade à esquerda)} \tag{2.20b}$$
$$\vec{u} \times (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{v}) + \beta\,(\vec{u} \times \vec{w})\,, \qquad \text{(Linearidade à direita)} \tag{2.20c}$$
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0, \qquad \text{(Ortogonalidade)} \tag{2.20d}$$
$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = uv\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v}). \qquad \text{(Norma)} \tag{2.20e}$$
$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u} \times \vec{v}) = u^2v^2\operatorname{sen}^2(\vec{u},\vec{v}) > 0. \qquad \text{(Orientação dextrogira)} \tag{2.20f}$$

Nas duas últimas propriedades, sen $(\vec{u},\vec{v})$ denota o seno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Observa-se que quando $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, este ângulo não está bem definido, estas identidades devem ser então interpretadas como $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = 0$ e $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\times\vec{v}) = 0$.

A última propriedade significa que o trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u}\times\vec{v}$ forma um sistema dextrogiro.

E 2.4.1. Mostre as propriedades (2.20a), (2.20b) e (2.20c).

A propriedade da ortogonalidade pode ser demonstrada diretamente da definição de produto vetorial e produto escalar:

$$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} &= \left[(u_2v_3-u_3v_2)\,\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\,\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\,\vec{k}\right]\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right)\\ &= (u_2v_3-u_3v_2)\,u_1+(u_3v_1-u_1v_3)\,u_2+(u_1v_2-u_2v_1)\,u_3 = 0\end{aligned}$$

igualmente temos:

$$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} &= \left[(u_2v_3-u_3v_2)\,\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\,\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\,\vec{k}\right]\left(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}\right)\\ &= (u_2v_3-u_3v_2)\,v_1+(u_3v_1-u_1v_3)\,v_2+(u_1v_2-u_2v_1)\,v_3 = 0\end{aligned}$$

Para provar a propriedade (2.20e), mostraremos primeiramente a seguinte (interessante) identidade:

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2+|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 = u^2v^2 \tag{2.21}$$

Da definição de norma e de produto vetorial temos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 &= \left\|(u_2v_3-u_3v_2)\,\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\,\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\,\vec{k}\right\|^2\\ &= (u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2\\ &= \left(u_2^2v_3^2-2u_2u_3v_2v_3+u_3^2v_2^2\right)+\left(u_3^2v_1^2-2u_1u_3v_1v_3+u_1^2v_3^2\right)\\ &+ \left(u_1^2v_2^2-2u_1u_2v_1v_2+u_2^2v_1^2\right).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Da definição de norma e de produto escalar temos:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 = (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 = u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_3^2+2u_1u_2v_1v_2+2u_1u_3v_1v_3+2u_2u_3v_2v_3.$$

Somando estas últimas duas expressões, simplificando e reagrupando termos, chegamos ao resultado desejado:

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2+|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 &= (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2\\ &= u_1^2v_1^2+u_1^2v_2^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_2^2v_3^2+u_3^2v_1^2+u_3^2v_2^2+u_3^2v_3^2\\ &= \left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right) = u^2v^2.\end{aligned}$$

Agora que dispomos da identidade (2.21), usamos (2.16) para escrever

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 = u^2v^2-|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 = u^2v^2-[uv\cos(\vec{u},\vec{v})]^2 = u^2v^2\left[1-\cos^2(\vec{u},\vec{v})\right] = u^2v^2\,\mathrm{sen}^2(\vec{u},\vec{v})$$

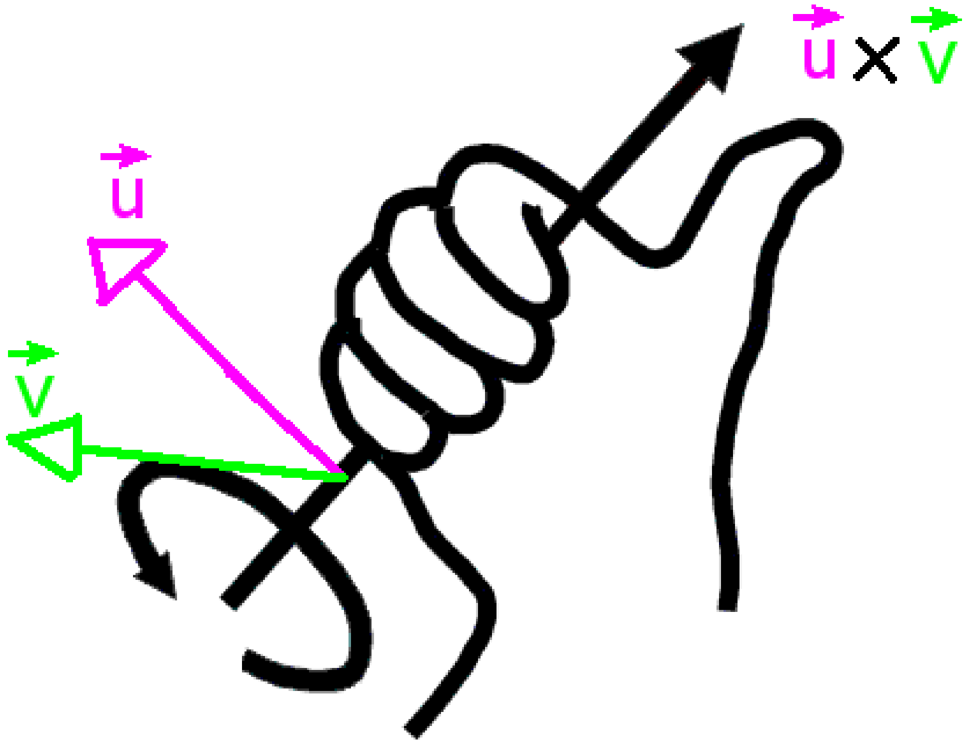

Figura 2.5: Regra da mão direita.

Extraímos a raiz quadrada, observando que sen $(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$ e obtemos o resultado desejado (2.20e). Um caso particular importante é quando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão na mesma direção. Como sen $0 =$ sen $180° = 0$, o produto vetorial de dois vetores paralelos é $\vec{0}$. Para demonstrar a propriedade (2.20f), calculamos o determinante envolvido

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\times\vec{v}) &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & (u_2v_3 - u_3v_2) \\ u_2 & v_2 & (u_3v_1 - u_1v_3) \\ u_3 & v_3 & (u_1v_2 - u_2v_1) \end{vmatrix} \\
&= \left(u_1^2v_2^2 - u_1u_2v_1v_2\right) + \left(u_3^2v_1^2 - u_1u_3v_1v_3\right) + \left(u_2^2v_3^2 - u_2u_3v_2v_3\right) \\
&- \left(u_1u_2v_1v_2 - u_2^2v_1^2\right) - \left(u_1u_3v_1v_3 - u_1^2v_3^2\right) - \left(u_2u_3v_2v_3 - u_3^2v_2^2\right)
\end{aligned}$$

Agora basta observar que esta expressão é idêntica a (2.22), ou seja, $\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2$ e portanto o determinante $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\times\vec{v})$ é positivo.

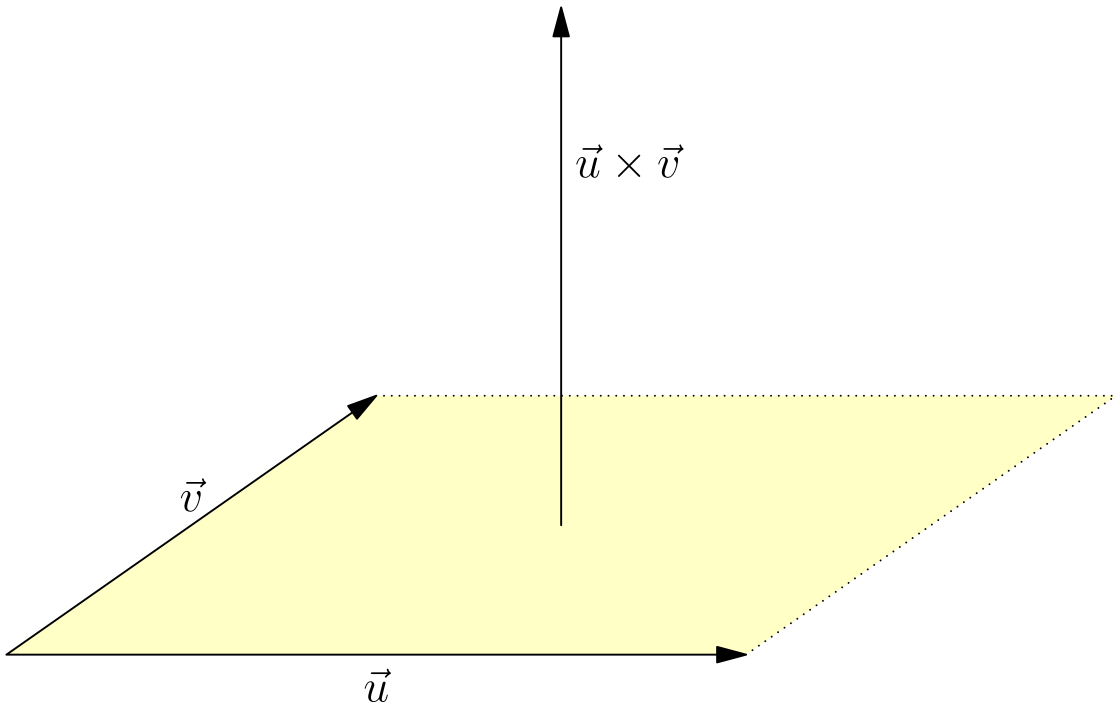

Figura 2.6: Interpretação geométrica do produto vetorial.

A importância desta propriedade está no fato que se $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ então o trio de vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forma um sistema dextrogiro. Além disso, por causa da propriedade (2.20d), $\vec{w}$ deve ser ortogonal tanto aos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$. Finalmente, observando a propriedade da norma (2.20e), podemos estabelecer a seguinte identidade para o produto vetorial de dois vetores não colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = uv \operatorname{sen} (\vec{u},\vec{v})\, \hat{e} \tag{2.23}$$

onde o versor $\hat{e}$ é ortogonal ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e forma um sistema dextrogiro com eles.

A norma do produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser interpretada como a área do paralelogramo cujos lados são $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (ver figura 2.6. A direção do produto vetorial é então ortogonal ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o sentido é dado pela regra da mão direita.

A definição de produto vetorial dada em (2.19) pode ser mais facilmente lembrada através do seguinte determinante formal:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{2.24}$$

que pode ser calculado pela regra de Sarrus.

O produto vetorial entre os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ pode ser obtido da definição (2.19) ou da caracterização geométrica do produto vetorial:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{array} \tag{2.25}$$

Exercícios resolvidos

E 2.4.2. Seja $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, calcule o vetor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Solução. Primeira forma: Calcularemos primeiramente usando o determinante (2.24):

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(0-0) + \vec{j}(0-0) + \vec{k}(-2-6) \\ &= -8\vec{k} \end{aligned}$$

Segunda forma: Calcularemos usando as propriedades (2.20) e as relações (2.25):

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{v} = \left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) \times \left(3\vec{i} - 2\vec{j}\right) \\ &= 3(\vec{i} \times \vec{i}) - 2(\vec{i} \times \vec{j}) + 6(\vec{j} \times \vec{i}) - 4(\vec{j} \times \vec{j}) \\ &= 3\,\vec{0} - 2\,\vec{k} - 6\,\vec{k} - 4\,\vec{0} \\ &= -8\vec{k} \end{aligned}$$

◊

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

E 2.4.3. Refaça os exercícios 2.3.6 e 2.3.7 usando o conceito de produto vetorial.

E 2.4.4. Encontre três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$. Exemplo de resposta: $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i}$ e $\vec{w} = \vec{k}$.

E 2.4.5. Simplifique as seguintes expressões:

a) $\vec{u} \times \vec{u}$

b) $\vec{u} \times \hat{u}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{u}$

d) $\vec{u} \cdot \hat{u}$

e) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

f) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$

g) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

h) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

i) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

j) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

Resp: $\vec{0}$,$\vec{0}$,u^2,u,$u^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + v^2$, $\vec{0}$, $u^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + v^2$, $\vec{0}$, $u^2 - v^2$, $2\vec{v} \times \vec{u}$

E 2.4.6. Mostre que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$. Conclua que o trio de vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forma um sistema dextrogiro se $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) > 0$ e levogiro se $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) < 0$. Interprete geometricamente.

2.5 Os triplos produtos e outras identidades vetoriais

O triplo produto escalar é definido por um produto vetorial e um produto escalar, isto é:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}). \tag{2.26}$$

Em coordenadas cartesianas, podemos escrever o triplo produto vetorial como:

$$\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right)\cdot\left[\left(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}\right)\times\left(w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}\right)\right].$$

Agora, usando a definição em cartesianas do produto vetorial dada na equação (2.19), substituindo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente, isto é:

$$\vec{v}\times\vec{w}=(v_2w_3-v_3w_2)\,\vec{i}+(v_3w_1-v_1w_3)\,\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\,\vec{k}.$$

Obtemos:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= u_1\,(v_2w_3-v_3w_2)+u_2\,(v_3w_1-v_1w_3)+u_3\,(v_1w_2-v_2w_1)\\
&= (u_1v_2w_3-u_1v_3w_2)+(u_2v_3w_1-u_2v_1w_3)+(u_3v_1w_2-u_3v_2w_1)\\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Observação 2.5.1. Assim como o produto vetorial possui uma interpretação geométrica importante, a intepretação geométrica do triplo produto escalar está relacionado com o paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ver figura (2.7). O módulo é o volume do paralepípedo e o sinal é dado pela orientação do trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$: positivo ou negativo para as orientações dextrogira ou levogira, respectivamente.

O triplo produto escalar pode, portanto, ser calculado pelo determinante da matriz formada pelas componentes dos três vetores envolvidos. A expressão do triplo produto escalar como o determinante dos três vetores poderia ter sido mais rapidamente obtido usando (2.24) o determinante formal que, alternativamente, define o produto vetorial:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix} \tag{2.28}$$

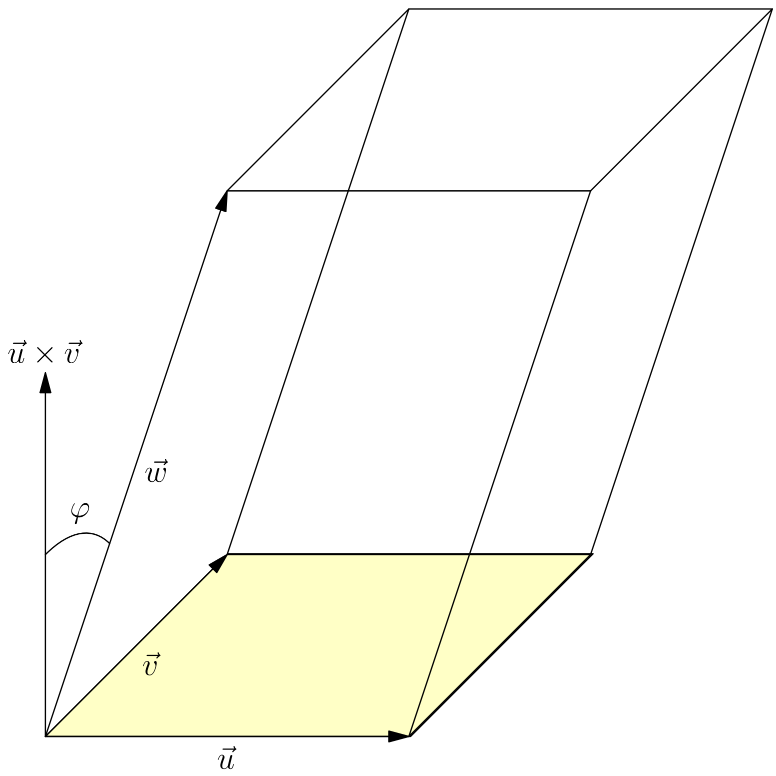

Figura 2.7: Representação do paralelepípedo formado por três vetores.

Sabemos que quando permutamos duas linhas de uma matriz, seu determinante muda de sinal, pelo que podemos obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= -\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})\\ &= -\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = -\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v})\end{aligned}$$

Extraindo apenas os termos de ordem ímpar temos:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \tag{2.29}$$

Observação 2.5.2. Um caso particular interessante é quando escolhemos $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ e obtemos:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \|\vec{u}\times\vec{v}\|^2.$$

Assim, retornamos à expressão (2.20f).

Podemos igualmente definir o triplo produto vetorial como o produto vetorial de um vetor pelo produto vetorial de outros dois vetores, isto é:

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}).$$

Observe cuidadosamente que o produto vetorial não é associativo, isto é, pode acontecer $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) \neq (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ (ver problema 2.4.4), portanto, a ordem dos vetores é relevante.2 Podemos mostrar que o triplo produto vetorial pode ser expresso como:

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}$$

Para verificar esta identidade, retornamos ao produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em coordenadas cartesianas e o escrevemos como a diferença entre dois vetores:

$$\begin{aligned}\vec{v}\times\vec{w} &= (v_2w_3 - v_3w_2)\,\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\,\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\,\vec{k}\\ &= \underbrace{\left(v_2w_3\vec{i} + v_3w_1\vec{j} + v_1w_2\vec{k}\right)}_{\vec{p_1}} - \underbrace{\left(v_3w_2\vec{i} + v_1w_3\vec{j} + v_2w_1\vec{k}\right)}_{\vec{p_2}} = \vec{p_1} - \vec{p_2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{p_1} &= \left(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\right)\times\left(v_2w_3\vec{i} + v_3w_1\vec{j} + v_1w_2\vec{k}\right)\\ &= (u_2v_1w_2 - u_3v_3w_1)\,\vec{i} + (u_3v_2w_3 - u_1v_1w_2)\,\vec{j} + (u_1v_3w_1 - u_2v_2w_3)\,\vec{k}\\ &= \left(u_2v_1w_2\vec{i} + u_3v_2w_3\vec{j} + u_1v_3w_1\vec{k}\right) - \left(u_3v_3w_1\vec{i} + u_1v_1w_2\vec{j} + u_2v_2w_3\right)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{p_2} &= \left(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\right)\times\left(v_3w_2\vec{i} + v_1w_3\vec{j} + v_2w_1\vec{k}\right)\\ &= (u_2v_2w_1 - u_3v_1w_3)\,\vec{i} + (u_3v_3w_2 - u_1v_2w_1)\,\vec{j} + (u_1v_3w_1 - u_2v_3w_2)\,\vec{k}\\ &= \left(u_2v_2w_1\vec{i} + u_3v_3w_2\vec{j} + u_1v_3w_1\vec{k}\right) - \left(u_3v_1w_3\vec{i} + u_1v_2w_1\vec{j}u_2v_3w_2\vec{k}\right)\end{aligned}$$

Subtraíndo temos:

$$\begin{aligned}\vec{u}\times(\vec{p_1}-\vec{p_2}) &= \left[(u_2w_2+u_3w_3)\,v_1\vec{i}+(u_1w_1+u_3w_3)\,v_2\vec{j}+(u_1w_1+u_2w_2)\,v_3\vec{k}\right]\\ &- \left[(u_2v_2+u_3v_3)\,w_1\vec{i}+(u_1v_1+u_3v_3)\,w_2\vec{j}+(u_1v_1+u_2v_2)\,w_3\vec{k}\right]\end{aligned}$$

Agora, somamos $u_1v_1w_1$ à primeira coordenada de cada um dos dois termos da subtração; somamos $u_2v_2w_2$ à segunda coordenada de cada um dos dois termos da subtração e somamos $u_3v_3w_3$ à terceira coordenada de cada um dos dois termos da subtração para obter:

$$\begin{aligned}\vec{u}\times(\vec{p_1}-\vec{p_2}) &= \left[(\vec{u}\cdot\vec{w})\,v_1\vec{i}+(\vec{u}\cdot\vec{w})\,v_2\vec{j}+(\vec{u}\cdot\vec{w})\,v_3\vec{k}\right]\\ &- \left[(\vec{u}\cdot\vec{v})\,w_1\vec{i}+(\vec{u}\cdot\vec{v})\,w_2\vec{j}+(\vec{u}\cdot\vec{v})\,w_3\vec{k}\right]\\ &= (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}.\end{aligned}$$

Lembrando que $\vec{p_1}-\vec{p_2}=\vec{v}\times\vec{w}$, obtemos:

$$\vec{u}\times(\vec{p_1}-\vec{p_2}) = \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}.$$

O formulário abaixo resume as identidades que acabamos de demonstrar e lista mais algumas sem demonstração:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\,, \quad \text{Triplo produto escalar} \tag{2.30a}$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}, \quad \text{Triplo produto vetorial} \tag{2.30b}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}, \quad \text{Triplo produto vetorial} \tag{2.30c}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{x})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\,(\vec{v}\cdot\vec{x})-(\vec{v}\cdot\vec{w})\,(\vec{u}\cdot\vec{x})\,, \tag{2.30d}$$

$$(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}))\,\vec{x}=(\vec{u}\cdot\vec{x})\,(\vec{v}\times\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{x})\,(\vec{w}\times\vec{u})+(\vec{w}\cdot\vec{x})\,(\vec{u}\times\vec{v})\,, \tag{2.30e}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{w}\times\vec{x})=(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{x}))\,\vec{w}-(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}))\,\vec{x}, \tag{2.30f}$$

(2.30g)

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

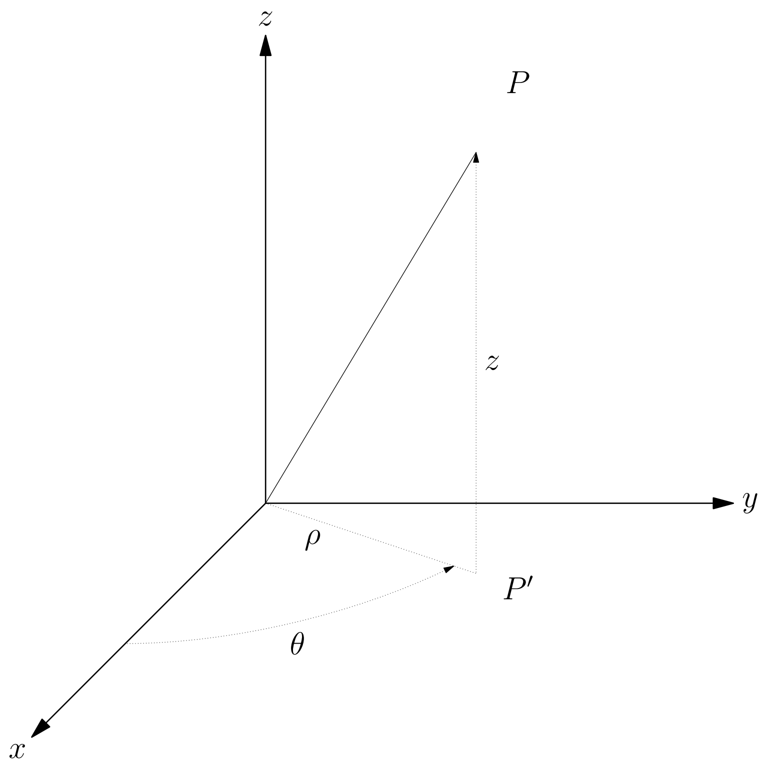

Figura 2.8: Representação de um ponto de coordenadas cilíndricas.

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

2.6 Sistema de coordenadas cilíndricas

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P é representado pelas coordenadas ρ, θ e z. A coordenada z é a mesma do sistema de coordenadas retangulares. A coordenada ρ indica a distância entre a origem e a projeção P' de P sob o eixo xy. Finalmente θ é o ângulo entre o semi-eixo $x > 0$ e o ponto P'. Ver figura 2.8. É fácil ver que

$$x = \rho\cos\theta \quad (2.31a)$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \quad (2.31b)$$

onde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.32}$$

A coordenadas ρ, θ e z são comumente denominadas, respectivamente, de "distância radial", "azimute" e "altura".

As equações (2.31) podem ser reescritas como

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2.33a}$$

$$\operatorname{sen}\,\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2.33b}$$

E 2.6.1. Os seguintes pontos são dados em coordenadas cartesianas, encontre suas representações em coordenas cilíndricas:

a) $\langle 1,1,1\rangle$

b) $\langle 1,-1,1\rangle$

c) $\langle -1,1,1\rangle$

d) $\langle -1,-1,1\rangle$

Resp: $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},1\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4},1\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4},1\right)$ e $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4},1\right)$.

E 2.6.2. Encontre uma expressão para distância de um ponto à origem em coordenadas cilíndricas
Resp: $\sqrt{\rho^2+z^2}$

2.7 Sistema de coordenadas esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto P é representado pelas coordenadas r, θ e φ. A coordenada r indica a distância do ponto P até a origem, sendo consistente com a definição de módulo de um vetor. A coordenada θ é o mesmo ângulo do sistema de coordenadas cilíndricas, ou seja, é o ângulo entre o semi-eixo $x > 0$ e o ponto P' (projeção de P no plano xy). O ângulo φ é o ângulo entre a reta que liga a origem até o ponto P e o semi-eixo $z > 0$. Ver figura 2.9. A relação entre a coordenadas no sistema de coordenadas esféricas e no sistema de coordenadas cilíndricas é dada pelas projeções:

$$z = r\cos\varphi \tag{2.34a}$$

$$\rho = r\operatorname{sen}\,\varphi \tag{2.34b}$$

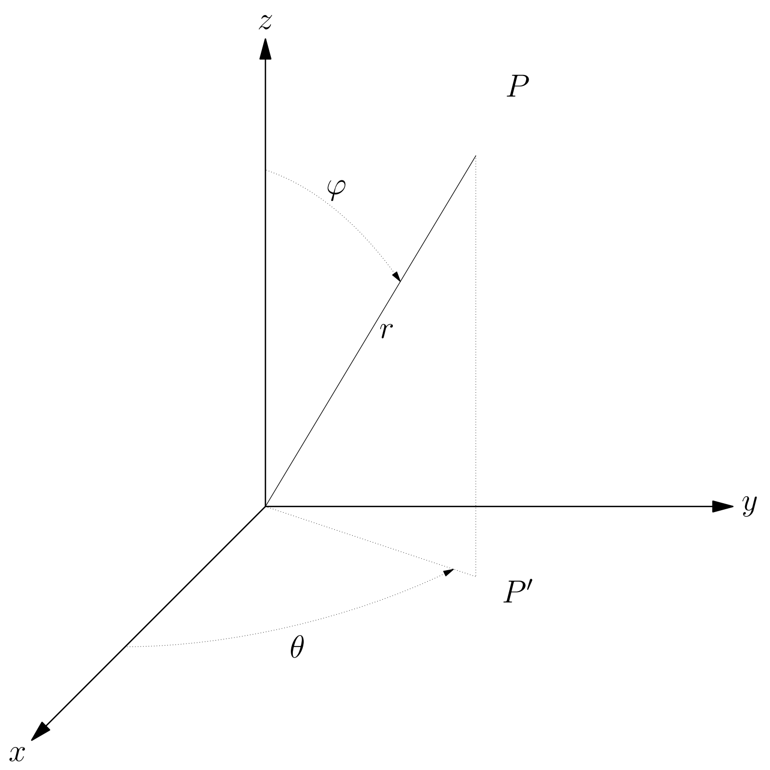

Figura 2.9: Representação de um ponto de coordenadas esféricas.

Usando (2.31), encontramos a relação entre o sistema de coordenadas esféricas e cartesianas:

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \cos\theta \tag{2.35a}$$
$$y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \tag{2.35b}$$
$$z = r\cos\varphi \tag{2.35c}$$

Analogamente, pode-se escrever:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2.36a}$$
$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \tag{2.36b}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{2.36c}$$
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{x^2+y^2} \tag{2.36d}$$

E 2.7.1. Os seguintes pontos são dados em coordenadas cartesianas, encontre suas representações em coordenas esféricas (ver também excício 2.6.1):

a) $\langle 1,1,1\rangle$

b) $\langle 1,-1,1\rangle$

c) $\langle -1,1,1\rangle$

d) $\langle -1,-1,1\rangle$

Resp: $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{4},\theta\right)$, $\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{4},\theta\right)$, $\left(\sqrt{3},\frac{3\pi}{4},\theta\right)$ e $\left(\sqrt{3},\frac{7\pi}{4},\theta\right)$, onde $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx$ 0,955.

2.8 Exemplos na física

Na mecânica, o trabalho de uma força constante atuando sobre um corpo que se move com velocidade constante é dado pelo produto escalar da força pelo deslocamento:

$$W = \vec{F}\cdot\triangle\vec{r}$$

O torque de uma força em relação a um eixo dado é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor que liga o ponto onde a força é aplicada e o pondo onde o torque é medido.

A força $\vec{F}$ que uma campo magnético $\vec{B}$ produz em uma partícula de carga elétrica q em movimento com velocidade $\vec{v}$ é dado pela lei de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$.

2.9 Notas avançadas

2.9.1 O que é um espaço linear?

A definição de espaço vetorial dada em (2.1) é ampla e engloba conceitos bem mais gerais que os espaços euclidianos de dimensão 2 e 3 com os quais o leitor tem maior familiaridade. As funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por exemplo, formam espaço vetorial onde os escalares são dados pelos números reais. O vetor nulo, neste caso, é a função $f(x) = 0$. Este espaço não tem dimensão finita pois os polinômios $P_n(x) = x^n$ para $n = 0,1,2,3,\ldots$ formam uma família infinita de vetores linearmente independentes (isso é uma consequência do teorema fundamental da álgebra).

2.9.2 Todo espaço linear tem uma base? Axioma da escolha.

Um problema importante é descobrir se todo espaço linear admite uma base. Este problema é mais complicado do que pode parecer e conduz a uma profunda discussão sobre os próprios fundamentos da matemática. De fato, pode-se mostrar que, o axioma da escolha implica que todo espaço linear tenha uma base.

O axioma da escolha é um dos axiomas da teoria de conjuntos padrão que tem diversas consequências contraintuitivas e fisicamente inesperadas. Um exemplo das bizarrias produzidas pelo axioma da escolha é o chamado paradoxo de Banach-Tarski: Dada uma esfera no espaço euclidiano de três dimensões, é possível cortá-la em um número finito de pedaços e rearranjar esses pedaços de forma a construir duas esferas idênticas à original. Em outras palavras, o axioma da escolha aplicado ao espaço euclidiano tridimensional traz como consequências a não preservação de "volume" frente a translações e rotações. Para definir de forma razoável os conceitos de comprimento, área e volumes, foi necessário o desenvolvimento da teoria da medida no final do Século XIX e início do Século XX. A solução encontrada foi construir uma medida apenas em uma família de subconjuntos chamamos conjuntos mensuráveis.

Vejamos um exemplo de espaço linear de dimensão: é fácil verificar que o conjunto de todos os polinômios $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$ formam um espaço linear frente às operações usuais de soma e multiplicação por um escalar. A base deste espaço é dada pelos monômios $P_n(x) = x^n$ para $n = 0,1,2,3,\ldots$ pois cada polinômio pode ser escrito como uma combinação linear **finita** de elementos desse base. No entanto, não é possível mostrar desta forma construtiva uma base para o espaço das funções reais ou mesmo para as funções reais contínuas. A existência de uma base para estes espaços é um conceito abstrato não construtivo.

2.9.3 Qual amplo é o conceito de norma?

Vimos que o conceito de espaço linear é muito mais amplo e útil que parecia. E quanto à norma? Estamos familiariados com a norma euclidiana, mas será que é possível definir outras normas no espaço $\mathbb{R}^n$ de forma a satisfazer as propriedades (2.12)? A norma euclidiana em um espaço de dimensão n é dada por

$$\|\vec{x}\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2\right)^{1/2}$$

De fato é possível mostrar que podemos alterar esta expressão para

$$\|\vec{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

com $p \geq 1$ de forma a preservar todas as propriedades da norma.

Mas será que é possível definir uma norma no espaço das funções reais? Esta é uma pergunta complicada, mas podemos simplificar exigindo um pouco mais desse espaço. Por exemplo, vamos considerar o espaço das funções reais contínuas definidas no intervalo [0,1]. Neste espaço é possível definir a seguinte norma:

$$\|f(x)\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \tag{2.37}$$

ou seja, a norma de uma função contínua é dada pelo máximo de seu módulo no intervalo.

No entanto, esta não é a única maneira de definir uma norma neste espaço, outra possibilidade é:

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \tag{2.38}$$

onde $p \geq 1$.

A norma (2.38) é chamada de norma L^p de uma função e a norma (2.37) é chamada de norma do máximo ou norma infinito ou norma L^∞. Isso porque

$$\lim_{p\to\infty} \|f(x)\|_p = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Esta normas exercem enorme importância na teoria de funções com importantes aplicações no estudo das equações diferenciais.

2.9.4 E o produto escalar?

Uma operação com as propriedades (2.17) é um produto escalar. Produtos escalares não aparecem apenas em espaços de duas ou três dimensões: mesmo espaços de dimensão infinita podem possuir um produto escalar. Tomemos como exemplo novamente o espaço das funções contínuas definidas no intervalo [0,1]. A seguinte operação possui todas as propriedades de um produto escalar:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Observe o leitor que foi usada a notação $\langle,\rangle$ para indicar o produto interno. Este produto interno induz a seguinte norma:

$$\|f\|_2 = (\langle f,f\rangle)^{1/2} = \left(\int_0^1 f(x)^2dx\right)^{1/2}$$

que é o caso particular de (2.38) quando $p = 2$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz admite a seguinte forma:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \left(\int_0^1 f(x)^2dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 g(x)^2dx\right)^{1/2}$$

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

2.10 Exercícios finais

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Capítulo 3

Seções cônicas

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.1 Parábola

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.1.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.1.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.1.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.2 Elipse

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.2.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.2.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.2.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.3 Hipérbole

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.3.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.3.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.3.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.4 Rotação

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.4.1 Discriminante

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.5 Conexão com seções do cone

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.6 Cônicas em coordenadas polares

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

3.7 Exercícios finais

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Capítulo 4

Superfícies Quádricas

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.1 Elipsóide

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.1.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.1.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.1.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.2 Parabolóide elíptico

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.2.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.2.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.2.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.3 Parabolóide hiperbólico

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.3.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.3.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.3.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.4 Hiperbolóide de uma folha

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.4.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.4.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.4.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.5 Hiperbolóide de duas folhas

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.5.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.5.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.5.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.6 Cilíndro elíptico

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.6.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.6.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.6.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.7 Cilindro hiperbólico

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.7.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.7.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.7.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em:
https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.8 Cilindro parabólico

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.8.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.8.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.8.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.9 Cone elíptico

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.9.1 Equação canônica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.9.2 Propriedades

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.9.3 Forma paramétrica

Esta seção (ou subseção) está sugerida. Participe da sua escrita. Veja como em: https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

4.10 Exercícios finais

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Capítulo 5

Derivadas parciais

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.1 Funções de várias variáveis

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.2 Limites e continuidade

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.3 Derivadas parciais

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.4 Diferenciabilidade

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.5 Gradiente e derivadas direcionais

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.6 Regra da cadeia

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.7 Otimização

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.8 Multiplicadores de Lagrange

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

5.9 Exercícios finais

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Capítulo 6

Integrais múltiplas

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

6.1 Integrais múltiplas e iteradas

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

6.2 Integrais duplas

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

6.3 Integrais triplas

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

6.4 Integração em coordenadas curvilíneas

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

6.5 Integração em coordenadas curvilíneas

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

6.6 Mudança de variáveis - O jacobiano

Exercícios resolvidos

Esta seção carece de exercícios resolvidos. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Exercícios

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

6.7 Exercícios finais

Esta seção carece de exercícios. Participe da sua escrita.

Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Referências Bibliográficas

Índice Remissivo